где полная производная означает дифференцирование вдоль траектории частиц. Общее решение такого уравнения есть произвольная функция от всех интегралов движения частицы в полях **E** и **B**.

§ 28. Пространственная дисперсия в плазме

Перепишем уравнения (27,10) в виде, более обычном для макроскопической электродинамики, введя в них наряду с напряженностью **E** также и электрическую индукцию **D**. При этом мы определим вектор электрической поляризации **P** соотношениями

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho; \tag{28,1}$$

непротиворечивость этих двух формул обеспечивается уравнением непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ (мы вернемся еще к этому определению ниже в этом параграфе). Тогда уравнения (27,10) примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \tag{28,2}$$

В слабых полях связь индукции **D** с напряженностью **E** линейна[1]). Но уже в обычных средах эта связь не имеет мгновенного характера по времени: значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в некоторый момент времени t зависит, вообще говоря, от значений $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в тот же, но и во все предшествующие моменты времени (см. VIII, § 58). В плазме к этому добавляется еще и нелокальность связи: значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в некоторой точке пространства $\mathbf{r}$ зависит от значений $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в той же точке, но, вообще говоря, и во всем объеме плазмы. Это свойство связано с тем, что «свободное» (т. е. без столкновений) движение частиц в плазме определяется значениями поля на всей их траектории.

Наиболее общая линейная связь между функциями $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ может быть записана в виде

$$D_\alpha(t, \mathbf{r}) = E_\alpha(t, \mathbf{r}) + \int\limits_{-\infty}^{t} \int K_{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_\beta(t', \mathbf{r}')\, d^3x'\, dt.$$

Для пространственно-однородной плазмы ядро интегрального оператора $K_{\alpha\beta}$ зависит только от разности пространственных

[1]) Условие слабости поля будет сформулировано в § 29.

аргументов $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Обозначив $\mathbf{r}-\mathbf{r}'=\boldsymbol{\rho}$, $t-t'=\tau$, перепишем эту связь в виде

$$D_\alpha(t, \mathbf{r}) = E_\alpha(t, \mathbf{r}) + \int_0^\infty \int K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho}) E_\beta(t-\tau, \mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\, d^3\rho\, d\tau. \tag{28,3}$$

Как обычно, путем разложения в ряд или интеграл Фурье можно представить поле в виде совокупности плоских волн, в которых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ пропорциональны $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Для таких волн связь $\mathbf{D}$ с $\mathbf{E}$ принимает вид

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta, \tag{28,4}$$

где тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \int_0^\infty \int K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\boldsymbol{\rho})} d^3\rho\, d\tau. \tag{28,5}$$

Из этого определения непосредственно следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon^*_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}). \tag{28,6}$$

Таким образом, нелокальность связи между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ приводит к тому, что диэлектрическая проницаемость плазмы оказывается функцией не только от частоты, но и от волнового вектора; об этой последней зависимости говорят как о *пространственной дисперсии*, подобно тому, как зависимость от частоты называют *временной* (или *частотной*) *дисперсией*.

Вернувшись к уравнениям (28,1 — 2), напомним, что при формулировке уравнений Максвелла для переменных полей в обычных средах наряду с диэлектрической поляризацией $\mathbf{P}$ вводится также и намагниченность $\mathbf{M}$, причем средний микроскопический ток разлагается на две части $\partial\mathbf{P}/\partial t$ и $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$; в плоской волне эти выражения сводятся к $-i\omega\mathbf{P}$ и $ic[\mathbf{kM}]$. Но при наличии пространственной дисперсии, когда все величины все равно зависят от $\mathbf{k}$, такое разделение нецелесообразно.

Отметим также, что, если ток $\mathbf{j}$ и плотность зарядов ρ целиком включены в определение поляризации $\mathbf{P}$ (как это сделано в (28,1)), последняя зависит, вообще говоря, как от электрического поля $\mathbf{E}$, так и от магнитного поля $\mathbf{B}$. Но поле $\mathbf{B}$ можно выразить через $\mathbf{E}$ согласно первой паре уравнений Максвелла (28,2), содержащей только эти две величины, т. е. (для плоской волны) согласно $[\mathbf{kE}] = \omega\mathbf{B}/c$, $\mathbf{kB}=0$. Тогда и поляризация $\mathbf{P}$ окажется выраженной только через $\mathbf{E}$, что и подразумевается в определении $\varepsilon_{\alpha\beta}$ согласно (28,3—5).

Зависимость от волнового вектора вносит в функции $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ выделенное направление — направление ее аргумента $\mathbf{k}$. Поэтому при наличии пространственной дисперсии диэлектрическая проницаемость является тензором даже в изотропной среде. Общий вид такого тензора можно представить в форме

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega, k)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon_l(\omega, k)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \tag{28,7}$$

При умножении на E_β первый член в (28,7) дает в индукцию $\mathbf{D}$ вклад, перпендикулярный волновому вектору, а второй член — вклад, параллельный $\mathbf{k}$. Для полей $\mathbf{E}$, перпендикулярных $\mathbf{k}$ или направленных по $\mathbf{k}$, связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ сводится соответственно к $\mathbf{D} = \varepsilon_t\mathbf{E}$ или $\mathbf{D} = \varepsilon_l\mathbf{E}$. Скалярные функции ε_t и ε_l называют соответственно *поперечной* и *продольной проницаемостями*. Они зависят от двух независимых переменных — частоты ω и абсолютной величины волнового вектора k. При $\mathbf{k} \to 0$ выделенное направление исчезает, и тогда тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ должен сводиться к виду $\varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}$, где $\varepsilon(\omega)$ — обычная скалярная проницаемость, учитывающая лишь частотную дисперсию. Соответственно предельные значения функций ε_t и ε_l одинаковы и равны

$$\varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \tag{28,8}$$

Согласно (28,6) скалярные функции ε_l и ε_t обладают свойством

$$\varepsilon_l(-\omega, k) = \varepsilon_l^*(\omega, k), \quad \varepsilon_t(-\omega, k) = \varepsilon_t^*(\omega, k). \tag{28,9}$$

Пространственная дисперсия не влияет на свойства ε_l и ε_t как функций комплексной переменной ω. Для этих функций остаются в силе все известные результаты (см. VIII, § 62), относящиеся к проницаемости $\varepsilon(\omega)$ обычных сред без пространственной дисперсии.

В этой главе мы будем рассматривать только изотропную плазму. Подчеркнем, что это предполагает не только отсутствие внешнего магнитного поля, но и изотропию функции распределения частиц по импульсам (в невозмущенной полем плазме). В противном случае появляются новые выделенные направления и тензорная структура $\varepsilon_{\alpha\beta}$ усложняется.

Уже было указано, что происхождение пространственной дисперсии в плазме связано с зависимостью «свободного» движения частиц от значений поля вдоль их траектории. Фактически, конечно, существенное влияние на движение частицы в каждой точке ее траектории оказывают значения поля не на всей траектории, а лишь на некоторых ее отрезках не слишком большой длины. Порядок величины этих длин может определяться двумя механизмами: столкновениями, нарушающими свободное движение по траектории, или усреднением осциллирующего поля за время пролета частицы по траектории. Для первого механизма характерным расстоянием является длина свободного пробега частицы $l \sim \bar{v}/\nu$, а для второго — расстояние $\bar{v}/\omega$, на которое частица, двигаясь со средней скоростью $\bar{v}$, перемещается за время одного периода поля.

В выражении (28,3) дальности корреляции между значениями **D** и **E** в различных точках пространства соответствуют расстояния $r_{\text{кор}}$, на которых существенно убывает функция $K_{\alpha\beta}(\tau, \rho)$. Можно утверждать, следовательно, что порядок величины этих расстояний дается меньшей из двух величин, l или $\bar{v}/\omega$ (причем надо брать ее для тех частиц—электронов или ионов, для которых она имеет большее значение). Если $\nu \ll \omega$, то меньшей является величина $\bar{v}/\omega$ и тогда

$$r_{\text{кор}} \sim \bar{v}/\omega. \tag{28,10}$$

Пространственная дисперсия значительна при $kr_{\text{кор}} \gtrsim 1$ и исчезает при $kr_{\text{кор}} \ll 1$; в последнем случае в (28,5) можно заменить $e^{-i\mathbf{k}\rho} \approx 1$ и интеграл перестает зависеть от **k**. С $r_{\text{кор}}$ из (28,10) мы находим, следовательно, что пространственная дисперсия существенна для волн, фазовая скорость которых (ω/k) сравнима или меньше средней скорости частиц в плазме. В обратном предельном случае при

$$\omega \gg k\bar{v} \tag{28,11}$$

пространственная дисперсия несущественна.

Важно, что значения $r_{\text{кор}}$ в плазме могут быть велики по сравнению со средними расстояниями между частицами ($\sim N^{-1/3}$). Именно это условие делает возможным макроскопическое описание пространственной дисперсии в терминах диэлектрической проницаемости даже тогда, когда дисперсия значительна. Напомним (см. VIII, § 83), что в обычных средах роль длины корреляции играют атомные размеры и потому уже условие применимости макроскопической теории требует соблюдения неравенства $kr_{\text{кор}} \ll 1$ (длина волны должна быть велика по сравнению с атомными размерами); именно поэтому в таких средах пространственная дисперсия (проявляющаяся, например, в так называемой естественной оптической активности) всегда оказывается лишь малой поправкой.

§ 29. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы

В общем случае произвольных значений **k**, когда существенную роль играет пространственная дисперсия, вычисление проницаемости требует применения кинетического уравнения. Сделаем это, предполагая, что в диэлектрической поляризации плазмы участвуют только электроны, а движение ионов несущественно (в таких случаях говорят об *электронной плазме*); к условию