частица, двигаясь со средней скоростью $\bar{v}$, перемещается за время одного периода поля.

В выражении (28,3) дальности корреляции между значениями **D** и **E** в различных точках пространства соответствуют расстояния $r_{кор}$, на которых существенно убывает функция $K_{\alpha\beta}(\tau, \rho)$. Можно утверждать, следовательно, что порядок величины этих расстояний дается меньшей из двух величин, l или $\bar{v}/\omega$ (причем надо брать ее для тех частиц—электронов или ионов, для которых она имеет большее значение). Если $\nu \ll \omega$, то меньшей является величина $\bar{v}/\omega$ и тогда

$$r_{кор} \sim \bar{v}/\omega. \tag{28,10}$$

Пространственная дисперсия значительна при $kr_{кор} \gtrsim 1$ и исчезает при $kr_{кор} \ll 1$; в последнем случае в (28,5) можно заменить $e^{-i\mathbf{k}\rho} \approx 1$ и интеграл перестает зависеть от **k**. С $r_{кор}$ из (28,10) мы находим, следовательно, что пространственная дисперсия существенна для волн, фазовая скорость которых (ω/k) сравнима или меньше средней скорости частиц в плазме. В обратном предельном случае при

$$\omega \gg k\bar{v} \tag{28,11}$$

пространственная дисперсия несущественна.

Важно, что значения $r_{кор}$ в плазме могут быть велики по сравнению со средними расстояниями между частицами ($\sim N^{-1/3}$). Именно это условие делает возможным макроскопическое описание пространственной дисперсии в терминах диэлектрической проницаемости даже тогда, когда дисперсия значительна. Напомним (см. VIII, § 83), что в обычных средах роль длины корреляции играют атомные размеры и потому уже условие применимости макроскопической теории требует соблюдения неравенства $kr_{кор} \ll 1$ (длина волны должна быть велика по сравнению с атомными размерами); именно поэтому в таких средах пространственная дисперсия (проявляющаяся, например, в так называемой естественной оптической активности) всегда оказывается лишь малой поправкой.

§ 29. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы

В общем случае произвольных значений **k**, когда существенную роль играет пространственная дисперсия, вычисление проницаемости требует применения кинетического уравнения. Сделаем это, предполагая, что в диэлектрической поляризации плазмы участвуют только электроны, а движение ионов несущественно (в таких случаях говорят об *электронной плазме*); к условию допустимости такого предположения и к обобщению результатов мы вернемся в § 31.

Для слабого поля ищем функцию распределения электронов в виде $f=f_0+\delta f$, где f_0 — невозмущенная полем стационарная изотропная и пространственно-однородная функция распределения, а δf — ее изменение под влиянием поля. Пренебрегая в кинетическом уравнении членами второго порядка малости, получим

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{r}}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}.$$

В изотропной плазме функция распределения зависит только от абсолютной величины импульса. Для такой функции направление вектора $\partial f_0/\partial \mathbf{p}$ совпадает с направлением $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ и его произведение с $[\mathbf{vB}]$ обращается в нуль. Таким образом, в линейном приближении магнитное поле не влияет на функцию распределения. Для δf остается уравнение

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{r}}=e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \tag{29,1}$$

Вместе с полем $\mathbf{E}$ функция δf предполагается пропорциональной $\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$. Тогда из (29,1) находим

$$\delta f=\frac{e\mathbf{E}}{i(\mathbf{kv}-\omega)}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \tag{29,2}$$

Условие малости поля возникает из требования, чтобы δf было мало по сравнению с f_0. Коэффициент при $\partial f_0/\partial \mathbf{p}$ в (29,2) есть амплитуда импульса, приобретаемого электроном в поле $\mathbf{E}$. Эта амплитуда должна быть мала по сравнению со средним (определенным по распределению f_0) импульсом $m\bar{v}$.

В невозмущенной плазме плотность зарядов электронов компенсируется в каждой точке зарядами ионов, а плотность тока равна нулю тождественно ввиду изотропии плазмы. Плотность же зарядов и плотность тока, возникающие в плазме при ее возмущении полем,

$$\rho=-e\int \delta f\, d^3p, \quad \mathbf{j}=-e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p. \tag{29,3}$$

Вместе с δf эти величины пропорциональны $\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$, и согласно (28,1) их связь с диэлектрической поляризацией дается формулами

$$i\mathbf{kP}=-\rho, \quad -i\omega\mathbf{P}=\mathbf{j}. \tag{29,4}$$

Способ взятия интегралов в (29,3) требует, однако, уточнения ввиду наличия у функции δf полюса при

$$\omega=\mathbf{kv}. \tag{29,5}$$

Чтобы придать интегралу смысл, будем вместо строго гармонического ($\sim e^{-i\omega t}$) рассматривать поле, которое бесконечно медленно включается от времени $t=-\infty$. Такому описанию поля соответствует добавление к его частоте бесконечно малой положительной мнимой части, т. е. замена $\omega \to \omega + i\delta$, где $\delta \to +0$. Действительно, при этом будет $E \sim e^{-i\omega t}e^{t\delta} \to 0$ при $t \to -\infty$; вызываемое же множителем $e^{t\delta}$ неограниченное возрастание поля при $t \to \infty$ несущественно, так как в силу принципа причинности не может оказать влияния на явления, рассматриваемые при конечных временах t (между тем как с $\delta < 0$ поле оказалось бы большим в прошлом, что нарушило бы применимость линейного по полю приближения). Таким образом, *правило обхода* полюсов (29,5) определяется заменой

$$\omega \to \omega + i0; \tag{29,6}$$

оно было впервые установлено *Л. Д. Ландау* (1946).

К обоснованию правила (29,6) можно подойти также с другой точки зрения, путем введения в кинетическое уравнение бесконечно малого интеграла столкновений, представленного в виде $\mathrm{St}\, f = -\nu\delta f$. Добавление такого члена в правую сторону уравнения (29,1) эквивалентно замене $\omega \to \omega + i\nu$ в члене $\partial\, \delta f/\partial t = -i\omega\delta f$; устремляя затем $\nu \to 0$, получим снова правило (29,6)[1].

При интегрированиях с правилом обхода (29,6) мы имеем дело с интегралами вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)\,dz}{z - i\delta}, \qquad \delta > 0.$$

В таком интеграле путь интегрирования в плоскости комплексной переменной z проходит под точкой $z = i\delta$; при $\delta \to 0$ это эквивалентно интегрированию вдоль вещественной оси с обходом полюса $z=0$ по бесконечно малой полуокружности снизу. Вклад в интеграл от этого обхода определяется полувычетом подынтегрального выражения, и в результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - i0}\,dz = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z}\,dz + i\pi f(0), \tag{29,7}$$

где перечеркнутый знак интеграла означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Эту формулу можно записать

[1] В изложенных рассуждениях содержатся по существу два перехода к пределу: к малым полям (линеаризация уравнений) и к $\nu \to 0$. Обратим внимание на то, что первый производится до второго. Необходимость именно в таком порядке предельных переходов связана с необходимостью соблюдения условия $\delta f \ll f_0$ при линеаризации; при $\nu = 0$ добавка δf обращалась бы в бесконечность при $\mathbf{kv} = \omega$.

и в символическом виде

$$\frac{1}{z-i0} = \mathrm{P}\frac{1}{z} + i\pi\delta(z), \tag{29,8}$$

где символ P означает взятие (при дальнейших интегрированиях) главного значения.

Вычислим продольную часть диэлектрической проницаемости плазмы. Воспользуемся для этого первым из соотношений (29,4), подставив в него $\delta\rho$ из (29,3) и (29,2):

$$i\mathbf{k}\mathbf{P} = -e^2\mathbf{E}\int \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3p}{i(\mathbf{k}\mathbf{v}-\omega-i0)}.$$

Пусть поле $\mathbf{E}$ (а с ним и $\mathbf{P}$) направлено вдоль $\mathbf{k}$; тогда $4\pi\mathbf{P} = (\varepsilon_l - 1)\mathbf{E}$. Мы приходим, таким образом, к следующей формуле для продольной проницаемости плазмы с произвольной стационарной функцией распределения $f(p)$ (индекс 0 у которой ниже опускаем):

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\int \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3p}{\mathbf{k}\mathbf{v}-\omega-i0}. \tag{29,9}$$

Выберем направление $\mathbf{k}$ в качестве оси x. В подынтегральном выражении в (29,9) от p_y, p_z зависит лишь f. Поэтому формулу (29,9) можно переписать в другом виде, введя функцию распределения только по $p_x = mv_x$:

$$f(p_x) = \int f(p)\,dp_y\,dp_z.$$

Тогда

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(p_x)}{dp_x} \frac{dp_x}{kv_x-\omega-i0}. \tag{29,10}$$

В изотропной плазме $f(p_x)$ — четная функция p_x.

Сразу же отметим важный результат: диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной; мнимая часть интеграла (29,10) определяется формулой (29,7). К обсуждению этого важного результата мы возвратимся в следующем параграфе, а здесь рассмотрим аналитические свойства функции частоты ω, определяемой интегралом (29,10). Уже из общих свойств диэлектрической проницаемости известно, что эта функция может иметь особые точки только в нижней полуплоскости комплексной переменной ω (см. VIII, § 62); это является следствием уже самого определения (28,5). Полезно, однако, проследить за тем, как это видно непосредственно из формулы (29,10), и выяснить связь между этими особыми точками и свойствами функции распределения $f(p_x)$.

Изменив обозначение переменной интегрирования, напишем интеграл в (29,10) в виде

$$\int_C \frac{df(z)}{dz}\frac{dz}{z-\omega/k}. \tag{29,11}$$

Интегрирование производится в плоскости комплексной переменной z вдоль вещественной оси, с обходом точки $z=\omega/k$ снизу (рис. 7, *а*). Тем самым интеграл (29,11) определяет аналитическую функцию и во всей верхней полуплоскости ω: для всех таких значений ω полюс $z=\omega/k$ обходится, как и следовало, снизу. При аналитическом же продолжении этой функции в нижнюю полуплоскость ω необходимость обхода полюса снизу требует каждый раз соответствующего смещения пути интегрирования (рис. 7, *б*). Но функция $df(z)/dz$, регулярная при вещественных z, имеет, вообще говоря, особые точки при комплексных значениях z (назовем их z_0), в том числе в нижней полуплоскости z. Увод пути интегрирования C от полюса $z=\omega/k$ оказывается невозможным, когда этот полюс сближается с какой-либо из особых точек z_0 и контур C оказывается зажатым между этими двумя точками. Таким образом, функция (29,11) имеет особые точки в нижней полуплоскости ω при значениях ω/k, совпадающих с особыми точками функции $df(z)/dz$.

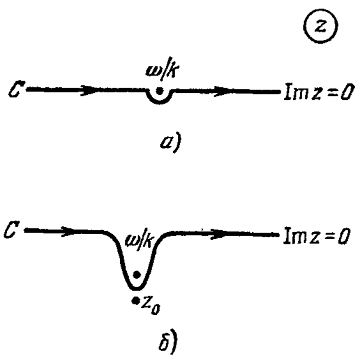

Рис. 7.

§ 30. Затухание Ландау

Уже было отмечено, что диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной ($\varepsilon_l=\varepsilon_l'+i\varepsilon_l''$). Отделив мнимую часть с помощью формулы (29,8), имеем

$$\varepsilon_l''=-4\pi^2e^2\int\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{\mathbf{k}}{k^2}\,\delta(\omega-\mathbf{kv})\,d^3p, \tag{30,1}$$

или

$$\varepsilon_l''=-\frac{4\pi^2e^2m}{k^2}\left.\frac{df(p_x)}{dp_x}\right|_{v_x=\omega/k}. \tag{30,2}$$

Как известно, комплексность диэлектрической проницаемости означает наличие диссипации энергии электрического поля в среде. Напомним формулы, определяющие среднюю диссипируемую