Изменив обозначение переменной интегрирования, напишем интеграл в (29,10) в виде

$$\int\limits_C \frac{df(z)}{dz}\frac{dz}{z-\omega/k}. \qquad (29,11)$$

Интегрирование производится в плоскости комплексной переменной z вдоль вещественной оси, с обходом точки $z=\omega/k$ снизу (рис. 7, *а*). Тем самым интеграл (29,11) определяет аналитическую функцию и во всей верхней полуплоскости ω: для всех таких значений ω полюс $z=\omega/k$ обходится, как и следовало, снизу. При аналитическом же продолжении этой функции в нижнюю полуплоскость ω необходимость обхода полюса снизу требует каждый раз соответствующего смещения пути интегрирования (рис. 7, *б*). Но функция $df(z)/dz$, регулярная при вещественных z, имеет, вообще говоря, особые точки при комплексных значениях z (назовем их z_0), в том числе в нижней полуплоскости z. Увод пути интегрирования C от полюса $z=\omega/k$ оказывается невозможным, когда этот полюс сближается с какой-либо из особых точек z_0 и контур C оказывается зажатым между этими двумя точками. Таким образом, функция (29,11) имеет особые точки в нижней полуплоскости ω при значениях ω/k, совпадающих с особыми точками функции $df(z)/dz$.

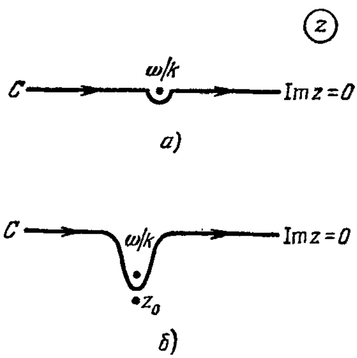

Рис. 7.

§ 30. Затухание Ландау

Уже было отмечено, что диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной ($\varepsilon_l=\varepsilon_l'+i\varepsilon_l''$). Отделив мнимую часть с помощью формулы (29,8), имеем

$$\varepsilon_l''=-4\pi^2e^2\int\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{\mathbf{k}}{k^2}\,\delta(\omega-\mathbf{kv})\,d^3p, \qquad (30,1)$$

или

$$\varepsilon_l''=-\frac{4\pi^2e^2m}{k^2}\frac{df(p_x)}{dp_x}\bigg|_{v_x=\omega/k}. \qquad (30,2)$$

Как известно, комплексность диэлектрической проницаемости означает наличие диссипации энергии электрического поля в среде. Напомним формулы, определяющие среднюю диссипируемую (в единицу времени в единице объема) энергию Q монохроматического электрического поля. Если это поле представлено в комплексном виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

то в общем случае анизотропной среды[1])

$$Q = \frac{i\omega}{8\pi}\frac{1}{2}\left[\varepsilon^*_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})\right] E^*_\alpha E_\beta; \tag{30,3}$$

диссипация определяется антиэрмитовой частью тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Если этот тензор симметричен, то антиэрмитова часть сводится к мнимой части и тогда

$$Q = \frac{\omega}{8\pi}\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\alpha E^*_\beta. \tag{30,4}$$

В случае продольного поля здесь остается только мнимая часть продольной проницаемости:

$$Q = \frac{\omega m}{8\pi}\varepsilon''_l |\mathbf{E}|^2. \tag{30,5}$$

Подставив сюда (30,2), находим в данном случае

$$Q = -|\mathbf{E}|^2 \frac{\pi m e^2\omega}{2k^2}\frac{df(p_x)}{dp_x}\bigg|_{v_x=\omega/k}. \tag{30,6}$$

Таким образом, диссипация возникает уже в бесстолкновительной плазме; это явление было предсказано *Л. Д. Ландау* (1946) и о нем говорят как о *затухании Ландау*. Не будучи связано со столкновениями, оно принципиально отличается от диссипации в обычных поглощающих средах: бесстолкновительная диссипация не связана с возрастанием энтропии и потому

---

[1]) Это выражение получается из общей формулы

$$Q = \langle \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} \rangle / 4\pi,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени (см. VIII, § 61). Здесь подразумевается, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ вещественны. Если же $\mathbf{E}$ представлено в комплексном виде, то в формулу надо подставить вместо $\mathbf{E}$ полусумму $(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*)/2$. Соответствующий вектор $\mathbf{D}$ имеет компоненты

$$\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E^*_\beta\right\},$$

а вектор $\dot{\mathbf{D}}$ —

$$\frac{i\omega}{2}\left\{-\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E^*_\beta\right\}.$$

Усреднив произведение $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ и воспользовавшись свойством (28,6), получим (30,3) (ср. ниже примечание на стр. 159).

представляет собой термодинамически обратимый процесс (к этой стороне явления мы вернемся еще в § 35).

Механизм затухания Ландау тесно связан с пространственной дисперсией. Как видно из (30,6), диссипация возникает от электронов, скорость которых в направлении распространения электрической волны совпадает с фазовой скоростью волны ($v_x=\omega/k$); о таких электронах говорят, что они движутся в фазе с волной[1]). По отношению к этим электронам поле стационарно и поэтому оно может производить над электронами работу, не обращающуюся в нуль при усреднении по времени (как это имеет место для других электронов, по отношению к которым поле осциллирует). Поучительно проследить за этим механизмом более детально, выведя формулу (30,6) прямым образом, не прибегая к кинетическому уравнению.

Пусть электрон движется вдоль оси x в направленном по этой же оси слабом электрическом поле

$$E(t,\ x)=\operatorname{Re}\left\{E_0e^{i(kx-\omega t)}e^{t\delta}\right\}; \tag{30,7}$$

множитель $e^{t\delta}$ снова описывает медленное включение поля от времени $t=-\infty$. Будем искать скорость $v_x\equiv w$ и координату x движущегося электрона в виде

$$w=w_0+\delta w,\quad x=x_0+\delta x,$$

где δw, δx — поправки к невозмущенному движению $x_0=w_0t$, происходящему с постоянной скоростью w_0. Линеаризованное по малым величинам уравнение движения электрона:

$$m\frac{d\,\delta w}{dt}=-eE(t,\ x_0)=-e\operatorname{Re}\left\{E_0e^{ikt(w_0-\omega/k)}e^{t\delta}\right\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\delta w&=-\frac{e}{m}\operatorname{Re}\frac{E(t,\ x_0)}{ik(w_0-\omega/k)+\delta},\\ \delta x&=-\frac{e}{m}\operatorname{Re}\frac{E(t,\ x_0)}{[ik(w_0-\omega/k)+\delta]^2}.\end{aligned} \tag{30,8}$$

Средняя работа, производимая полем над электроном в единицу времени, есть

$$q=-e\langle wE(t,\ x)\rangle=-e\langle(w_0+\delta w)E(t,\ x_0+\delta x)\rangle\approx$$
$$\approx-ew_0\left\langle\frac{\partial E}{\partial x_0}\delta x\right\rangle-e\langle\delta w\cdot E(t,\ x_0)\rangle,$$

[1]) Отметим в этой связи, что разность $\omega-\mathbf{kv}$ есть частота поля в системе отсчета, движущейся вместе с электроном.

или, в комплексном виде[1]),

$$q = -\frac{e}{2}\operatorname{Re}\left\{w_0\delta x\frac{\partial E^*}{\partial x_0} + \delta w\cdot E^*\right\}.$$

Подставив сюда E, δx, δw из (30,7 —8), после простого приведения получим

$$q = \frac{e^2}{2m}|E|^2\frac{d}{dw_0}\frac{w_0\delta}{\delta^2 + k^2(w_0 - \omega/k)^2}.$$

Теперь остается просуммировать q по электронам со всевозможными начальными импульсами $p_x = mw_0$:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} qf(p_x)\,dp_x = -\frac{e^2|E|^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w_0\delta}{\delta^2 + k^2(w_0 - \omega/k)^2}\frac{df}{dp_x}dp_x$$

(произведено интегрирование по частям). Переход к пределу осуществляется с помощью формулы

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{\delta^2 + z^2} = \pi\delta(z) \qquad (30,9)$$

и непосредственно приводит к выражению (30,6).

В соответствии с обратимым характером бесстолкновительной диссипации, термодинамические условия не требуют положительности величины Q (как это имеет место для истинной диссипации). Выражение (30,6) всегда положительно при изотропном распределении $f(p)$ (см. задачу). Для анизотропных распределений, однако, Q может оказаться отрицательной величиной — электроны будут в среднем отдавать энергию волне, а не получать ее[2]). Такие случаи тесно связаны с возможной неустойчивостью плазмы (см. § 61), и, таким образом, условие $Q > 0$ (а тем самым и $\varepsilon'' > 0$) является результатом лишь устойчивости состояния плазмы.

---

[1]) Если две периодические по времени величины A и B представлены в комплексном виде ($\backsim e^{-i\omega t}$), то,

$$\langle \operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B\rangle = \frac{1}{4}\langle (A + A^*)(B + B^*)\rangle.$$

При усреднении произведения AB и A^*B^*, содержащие $e^{-2i\omega t}$ и $e^{2i\omega t}$, обращаются в нуль и остается

$$\langle \operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B\rangle = \frac{1}{4}(AB^* + A^*B) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(AB^*).$$

[2]) Произведенный выше наглядный вывод формулы (30,6) не связан с изотропией распределения. Не связано с ней также и выражение (30,2) — см. ниже § 32.

С точки зрения описанной выше физической картины затухания Ландау наличие производной df/dp_x в формуле (30,6) можно наглядно интерпретировать следующим образом: в обмене энергией с полем участвуют частицы со скоростями v_x, близкими к ω/k, причем частицы с $v_x < \omega/k$ получают энергию от волны, а с $v_x > \omega/k$ — отдают энергию волне; волна будет терять энергию, если первых несколько больше, чем вторых.

Задача

Показать, что для изотропной плазмы бесстолкновительная диссипация Q всегда положительна.

Решение. В изотропной плазме f — функция только от $p^2 = p_x^2 + p_\perp^2$ (p_x и $\mathbf{p}_\perp$ — составляющие $\mathbf{p}$, продольная и поперечная по отношению к $\mathbf{k}$). Пишем

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = \frac{d}{dp_x}\int_0^\infty f\left(p_x^2 + p_\perp^2\right)\pi d\left(p_\perp^2\right) = 2\pi p_x \int_0^\infty f'\left(p_x^2 + p_\perp^2\right) d\left(p_\perp^2\right),$$

и поскольку $f(p^2) \to 0$ при $p^2 \to \infty$, то

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = -2\pi p_x f\left(p_x^2\right),$$

так что $df/dp_x < 0$ при $p_x = \omega/k > 0$.

§ 31. Диэлектрическая проницаемость максвелловской плазмы

Применим формулу (29,10) к электронной плазме с равновесным (максвелловским) распределением электронов

$$f(p_x) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mT_e}\right), \tag{31,1}$$

где T_e — температура электронного газа (имея в виду включить ниже в рассмотрение также и ионную компоненту плазмы, будем сразу же отличать индексом e величины, относящиеся к электронам). Находим

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{1}{(ka_e)^2}\left[1 + F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Te}}\right)\right], \tag{31,2}$$