С точки зрения описанной выше физической картины затухания Ландау наличие производной df/dp_x в формуле (30,6) можно наглядно интерпретировать следующим образом: в обмене энергией с полем участвуют частицы со скоростями v_x, близкими к ω/k, причем частицы с $v_x < \omega/k$ получают энергию от волны, а с $v_x > \omega/k$—отдают энергию волне; волна будет терять энергию, если первых несколько больше, чем вторых.

Задача

Показать, что для изотропной плазмы бесстолкновительная диссипация Q всегда положительна.

Решение. В изотропной плазме f—функция только от $p^2 = p_x^2 + p_\perp^2$ (p_x и $\mathbf{p}_\perp$—составляющие $\mathbf{p}$, продольная и поперечная по отношению к $\mathbf{k}$). Пишем

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = \frac{d}{dp_x}\int_0^\infty f\left(p_x^2 + p_\perp^2\right) \pi d\left(p_\perp^2\right) = 2\pi p_x \int_0^\infty f'\left(p_x^2 + p_\perp^2\right) d\left(p_\perp^2\right),$$

и поскольку $f(p^2) \longrightarrow 0$ при $p^2 \longrightarrow \infty$, то

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = -2\pi p_x f\left(p_x^2\right),$$

так что $df/dp_x < 0$ при $p_x = \omega/k > 0$.

§ 31. Диэлектрическая проницаемость максвелловской плазмы

Применим формулу (29,10) к электронной плазме с равновесным (максвелловским) распределением электронов

$$f(p_x) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mT_e}\right), \tag{31,1}$$

где T_e—температура электронного газа (имея в виду включить ниже в рассмотрение также и ионную компоненту плазмы, будем сразу же отличать индексом e величины, относящиеся к электронам). Находим

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{1}{(ka_e)^2}\left[1 + F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Te}}\right)\right], \tag{31,2}$$

где функция $F(x)$ определена интегралом[1])

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-z^2}dz}{z-x-i0}=\frac{x}{\sqrt{\pi}}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-z^2}dz}{z-x}+i\sqrt{\pi}xe^{-x^2} \qquad (31,3)$$

и введены параметры

$$v_{Te}=\sqrt{\frac{T_e}{m}},\quad a_e=\sqrt{\frac{T_e}{4\pi N_e e^2}}. \qquad (31,4)$$

Величина v_{Te} есть некоторая средняя тепловая скорость электронов; a_e — дебаевский радиус, определенный по заряду и плотности электронов.

Предельные выражения функции $F(x)$ для больших и малых значений x легко найти непосредственно из определения (31,3). При $x\gg 1$ пишем

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-z^2}dz}{z-x}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\left(1+\frac{z}{x}+\frac{z^2}{x^2}+\cdots\right)dz.$$

Интегралы от нечетных по x членов обращаются в нуль, а остальные дают

$$F(x)+1\approx-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{4x^4}+i\sqrt{\pi}xe^{-x^2},\qquad x\gg 1. \qquad (31,5)$$

При $x\ll 1$ производим сначала замену переменной интегрирования $z=u+x$, после чего разлагаем по степеням x:

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-z^2}dz}{z-x}=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\fint_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2-2ux}\frac{du}{u}\approx\frac{x}{\sqrt{\pi}}\fint_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\left(\frac{1}{u}-2x\right)du.$$

Главное значение интеграла от первого (нечетного по u) члена обращается в нуль, а с учетом второго члена находим

$$F(x)\approx-2x^2+i\sqrt{\pi}x,\qquad x\ll 1. \qquad (31,6)$$

С помощью этих формул можно написать предельные выражения диэлектрической проницаемости. При больших частотах

---

[1]) Различные формы представления функции $F(x)$ и ее подробные численные таблицы даны в книге: *В. Н. Фаддеева, Н. М. Терентьев.* Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. — М.: Гостехиздат, 1954. Табулированная в этой книге функция $w(x)$ связана с $F(x)$ согласно $F(x)=i\sqrt{\pi}xw(x)$.

имеем

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\right) + \\ + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega\Omega_e^2}{(kv_{Te})^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) \quad \text{при} \quad \omega/kv_{Te} \gg 1. \qquad (31,7)$$

Здесь введен параметр

$$\Omega_e = \frac{v_{Te}}{a_e} = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m}} \qquad (31,8)$$

— так называемая *плазменная* (или *ленгмюровская*) частота для электронов. Как и следовало, в случае $\omega/kv_{Te} \gg 1$ пространственная дисперсия приводит лишь к малым поправкам в диэлектрической проницаемости, причем мнимая часть ε_l оказывается экспоненциально малой — результат того, что в максвелловском распределении лишь экспоненциально малая доля электронов имеет скорости $v_x = \omega/k \gg v_{Te}$. Независящее от k предельное значение диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\Omega_e/\omega)^2. \qquad (31,9)$$

Это выражение относится как к продольной, так и к поперечной проницаемости (см. (28,8)). Его легко получить с помощью простых рассуждений, без использования кинетического уравнения.

Действительно, при $k \to 0$ поле волны можно считать однородным, и тогда уравнение движения электрона $m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$ дает $\mathbf{v} = e\mathbf{E}/im\omega$, так что создаваемая электронами плотность тока

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N_e}{im\omega}\mathbf{E}.$$

С другой стороны, имеем

$$\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P} = -i\omega\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{4\pi}\mathbf{E}.$$

Сравнение обоих выражений и приводит к формуле (31,9).

В обратном предельном случае малых частот имеем

$$\varepsilon_l = 1 + \left(\frac{\Omega_e}{kv_{Te}}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\omega}{kv_{Te}}\right)^2 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{kv_{Te}}\right] \quad \text{при} \quad \omega/kv_{Te} \ll 1. \qquad (31,10)$$

Обратим внимание на то, что пространственная дисперсия устраняет полюс при $\omega = 0$, который имеет диэлектрическая проницаемость обычной проводящей среды. Отметим также, что мнимая часть проницаемости оказывается относительно малой (хотя и не экспоненциально) и при малых частотах, на этот раз — в результате малости фазового объема электронов, в котором удовлетворяется условие $\mathbf{kv}=\omega$.

В § 29 было показано, что функция $\varepsilon_l(\omega)$, определяемая интегралом (29,10), не имеет особых точек в верхней полуплоскости ω, а ее особые точки в нижней полуплоскости определяются особыми точками $df(p_x)/dp_x$ как функции комплексной переменной p_x. Но для максвелловского распределения функция

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} \propto p_x \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mT}\right)$$

вообще не имеет особых точек на конечных расстояниях во всей комплексной плоскости p_x (т. е. является целой функцией). Поэтому и диэлектрическая проницаемость максвелловской бесстолкновительной плазмы является целой функцией ω — не имеет вовсе особенностей при конечных ω.

До сих пор мы рассматривали вклад в диэлектрическую проницаемость, происходящий только от электронной компоненты плазмы. Вклад ионной части вычисляется точно тем же способом и оба вклада в ε_l-1 просто складываются; таким образом, приходим к очевидному обобщению формулы (31,2):

$$\varepsilon_l-1=\frac{1}{(ka_e)^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Te}}\right)+1\right]+\frac{1}{(ka_i)^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Ti}}\right)+1\right]. \tag{31,11}$$

Индексы e и i отличают величины, относящиеся к электронам и ионам;

$$v_{Ti}=\left(\frac{T_i}{M}\right)^{1/2},\quad a_i=\frac{v_{Ti}}{\Omega_i}=\left[\frac{T_i}{4\pi N_i(ze)^2}\right]^{1/2},$$
$$\Omega_i^2=\frac{4\pi N_i(ze)^2}{M} \tag{31,12}$$

(M и ze — масса и заряд иона). Выражение (31,11) относится к «двухтемпературной» плазме, в которой каждая из компонент имеет равновесное распределение, но с различными температурами, так что друг с другом электроны и ионы в равновесии не находятся. Такой случай возникает естественным образом ввиду того, что большая разница в массе затрудняет обмен энергией при столкновениях электронов с ионами.

Обычно приходится иметь дело с ситуацией, когда $T_i \lesssim T_e$; при этом $v_{Ti} \ll v_{Te}$. Учитывая также, что всегда $\Omega_i \ll \Omega_e$, легко заключить, что в случае $\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}$ вклад ионов пренебрежим, так что справедлива формула (31,7). В обратном предельном случае имеем

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2} + \frac{1}{(ka_i)^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{(ka_i)^2 k v_{Ti}}, \qquad (31,13)$$
$$\omega \ll k v_{Ti} \ll k v_{Te}.$$

Случай же $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ будет рассмотрен в § 32.

Все вычисления в этом и предыдущем параграфах произведены для продольной части диэлектрической проницаемости. Вычисление поперечной проницаемости представляет меньший интерес. Дело в том, что поперечное поле обычно сводится к обычным электромагнитным волнам, для которых частота и волновой вектор связаны соотношением $\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon_t}$. При этом $\omega/k > c \gg v_{Te}$, т. е. $\omega \gg kv_{Te}$; поэтому пространственная дисперсия мала и диэлектрическая проницаемость дается формулой (31,9). Для этих волн отсутствует также и затухание Ландау; поскольку фазовая скорость волны превышает скорость света, то в плазме нет частиц, которые могли бы двигаться в фазе с волной (строго говоря, доказательство этого утверждения требует релятивистского рассмотрения — см. задачу 4).

Задачи

1. Найти потенциал электрического поля, создаваемого покоящимся в плазме малым точечным сторонним зарядом e_1.

Решение. С учетом поляризации плазмы, поле определяется уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e_1 \delta(\mathbf{r})$. Для постоянного поля компоненты Фурье индукции и потенциала связаны соотношением $\mathbf{D}_\mathbf{k} = \varepsilon_l(0, k)\,\mathbf{E}_\mathbf{k} = -i\mathbf{k}\varepsilon_l(0, k)\,\varphi_\mathbf{k}$. Поэтому для $\varphi_\mathbf{k}$ находим уравнение

$$i\mathbf{k}\mathbf{D}_\mathbf{k} = k^2\varepsilon_l(0, k)\,\varphi_\mathbf{k} = 4\pi e_1.$$

Взяв $\varepsilon_l(0, k)$ из (31,13), имеем

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{4\pi e_1}{k^2 + a^{-2}}, \qquad a^{-2} = a_e^{-2} + a_i^{-2}.$$

Соответствующая координатная функция

$$\varphi = \frac{e_1}{r} e^{-r/a};$$

таким образом, диэлектрическая проницаемость (31,13) описывает экранирование статического заряда в согласии с V, § 78. Условие малости заряда: $e_1 \ll Na^3 e$, — e_1 должно быть мало по сравнению с зарядом частиц плазмы в объеме $\sim a^3$.

2. Вычислить поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Решение. Вычислив электронную поляризацию $\mathbf{P}=-\mathbf{j}/i\omega$ с $\mathbf{j}$ из (29,3), получим для тензора проницаемости [1]):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\frac{4\pi e^2}{\omega}\int\frac{v_\alpha}{\mathbf{kv}-\omega-i0}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}d^3p. \qquad (1)$$

Поперечная часть выделяется из $\varepsilon_{\alpha\beta}$ как

$$\varepsilon_t=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{\alpha\alpha}-\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right]$$

и дается интегралом

$$\varepsilon_t=1-\frac{2\pi e^2}{\omega}\int\mathbf{v}_\perp\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}_\perp}\frac{d^3p}{\mathbf{kv}-\omega-i0}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{p}_\perp=m\mathbf{v}_\perp$ — поперечная по отношению к $\mathbf{k}$ компонента импульса. Для максвелловского распределения f после интегрирования по $d^2p_\perp$ находим окончательно

$$\varepsilon_t-1=\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Te}}\right) \qquad (3)$$

с функцией F из (31,3); ионы вносят в ε_t-1 аналогичный вклад. В предельных случаях

$$\varepsilon_t-1=-\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\left[1+\left(\frac{kv_{Te}}{\omega}\right)^2\right]+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega_e}{\omega ka_e}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right) \qquad (4)$$

$$(\omega\gg kv_{Te}\gg kv_{Ti}),$$

$$\varepsilon_t-1=-\frac{1}{(ka_e)^2}-\frac{1}{(ka_i)^2}+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega_e}{\omega ka_e} \qquad (5)$$

$$(\omega\ll kv_{Ti}\ll kv_{Te}).$$

3. Определить диэлектрическую проницаемость ультрарелятивистской электронной плазмы; температура $T_e\gg mc^2$ (*В. П. Силин*, 1960).

Решение. Кинетическое уравнение сохраняет свой вид (27,9) и в релятивистском случае. Соответственно сохранятся такие формулы, как (29,9) и (2) из задачи 2. В ультрарелятивистском случае скорость электронов $v\approx c$, их энергия есть cp, а равновесная функция распределения

$$f(p)=\frac{N_ec^3}{8\pi T_e^3}e^{-cp/T_e}.$$

Для продольной проницаемости находим

$$\varepsilon_l-1=\frac{4\pi e^2c}{kT_e}\int_{-1}^{1}\int_0^\infty\frac{f(p)\cos\theta\cdot 2\pi p^2\,dp\,d\cos\theta}{kc\cos\theta-\omega-i0} \qquad (6)$$

(θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$). Интегрирование f по $2\pi p^2dp$ дает $N_e/2$, после чего интегрирование по $d\cos\theta$ с обходом полюса $\cos\theta=\omega/kc$ снизу приводит к

[1]) В этом выражении плазма еще не предполагается изотропной.

результату

$$\varepsilon_l'(\omega, k)-1=\frac{4\pi N_e e^2}{k^2 T_e}\left[1+\frac{\omega}{2kc}\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega-ck}\right|\right],$$

$$\varepsilon_l''(\omega, k)=\begin{cases}\pi\omega/2kc & \text{при } \omega/k < c,\\ 0 & \text{при } \omega/k > c.\end{cases} \qquad (7)$$

Аналогичным образом, исходя из (2), находим для поперечной проницаемости

$$\varepsilon_t'(\omega, k)-1=\frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{c^2k^2}\right)\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega+ck}\right|-\frac{2\omega}{ck}\right],$$

$$\varepsilon_t''(\omega, k)=\begin{cases}\pi(1-\omega^2/c^2k^2) & \text{при } \omega/k < c,\\ 0 & \text{при } \omega/k > c.\end{cases} \qquad (8)$$

4. Найти мнимую часть ε_l для нерелятивистской ($T_e \ll mc^2$) электронной плазмы при $\omega/k \sim c \gg v_{Te}$ (*В. П. Силин*, 1960).

Решение. Из формулы (29,9) (справедливой при любых скоростях электронов) после интегрирования по $d\cos\theta$ находим

$$\varepsilon''(\omega, k)=\frac{8\pi^3 e^2\omega}{k^3 T_e}\int_{p_m}^{\infty}\frac{f(p)\,p^2}{v}\,dp, \qquad p_m=\frac{mc\omega}{\sqrt{c^2k^2-\omega^2}} \qquad (9)$$

(полюс $\cos\theta=\omega/kv$ лежит на пути интегрирования по $\cos\theta$ лишь при $\omega/kv<1$; поэтому нижний предел интегрирования по dp отвечает значению $v=\omega/k$). Функция распределения при $T_e \ll mc^2$, справедливая для всех скоростей электронов, есть

$$f(p)=\frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}}\exp\left(\frac{mc^2}{T_e}-\frac{\varepsilon(p)}{T_e}\right), \qquad \varepsilon=c\,(p^2+m^2c^2)^{1/2}$$

(значение нормировочного интеграла определяется областью $\varepsilon-mc^2 \approx p^2/2m \sim T_e \ll mc^2$). В интеграле (9) при $\omega/k \sim c \gg v_{Te}$ существенна область значений p вблизи нижнего предела. Полагая в экспоненте

$$\varepsilon(p)\approx\varepsilon(p_m)+\left.\frac{d\varepsilon}{dp}\right|_{p=p_m}(p-p_m)=\varepsilon(p_m)+\frac{\omega}{k}(p-p_m)$$

(а в предэкспоненциальном множителе $p\approx p_m$, $v\approx\omega/k$) и интегрируя по $p-p_m$ от 0 до ∞, получим

$$\varepsilon_l''=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega\Omega_e^2}{(kv_{Te})^3}\frac{1}{1-(\omega/kc)^2}\exp\left\{-\frac{mc^2}{T_e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\omega/kc)^2}}-1\right]\right\}.$$

Этим определяется закон обращения ε_l'' в нуль при $\omega/ck \to 1$.

§ 32. Продольные плазменные волны

Пространственная дисперсия приводит к возможности распространения в плазме продольных электрических волн. Зависимость частоты от волнового вектора (или, как говорят, *закон*