результату

$$\varepsilon_l'(\omega,\ k)-1=\frac{4\pi N_e e^2}{k^2 T_e}\left[1+\frac{\omega}{2kc}\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega-ck}\right|\right],$$

$$\varepsilon_l''(\omega,\ k)=\begin{cases}\pi\omega/2kc & \text{при } \omega/k<c,\\ 0 & \text{при } \omega/k>c.\end{cases} \tag{7}$$

Аналогичным образом, исходя из (2), находим для поперечной проницаемости

$$\varepsilon_t'(\omega,\ k)-1=\frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{c^2k^2}\right)\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega+ck}\right|-\frac{2\omega}{ck}\right],$$

$$\varepsilon_t''(\omega,\ k)=\begin{cases}\pi\left(1-\omega^2/c^2k^2\right) & \text{при } \omega/k<c,\\ 0 & \text{при } \omega/k>c.\end{cases} \tag{8}$$

4. Найти мнимую часть $\varepsilon_l$ для нерелятивистской ($T_e \ll mc^2$) электронной плазмы при $\omega/k \sim c \gg v_{Te}$ (*В. П. Силин*, 1960).

Решение. Из формулы (29,9) (справедливой при любых скоростях электронов) после интегрирования по $d\cos\theta$ находим

$$\varepsilon''(\omega,\ k)=\frac{8\pi^3 e^2\omega}{k^3 T_e}\int\limits_{p_m}^{\infty}\frac{f(p)\,p^2}{v}\,dp,\qquad p_m=\frac{mc\omega}{\sqrt{c^2k^2-\omega^2}} \tag{9}$$

(полюс $\cos\theta=\omega/kv$ лежит на пути интегрирования по $\cos\theta$ лишь при $\omega/kv<1$; поэтому нижний предел интегрирования по $dp$ отвечает значению $v=\omega/k$). Функция распределения при $T_e \ll mc^2$, справедливая для всех скоростей электронов, есть

$$f(p)=\frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}}\exp\left(\frac{mc^2}{T_e}-\frac{\varepsilon(p)}{T_e}\right),\qquad \varepsilon=c\left(p^2+m^2c^2\right)^{1/2}$$

(значение нормировочного интеграла определяется областью $\varepsilon-mc^2 \approx p^2/2m \sim T_e \ll mc^2$). В интеграле (9) при $\omega/k \sim c \gg v_{Te}$ существенна область значений $p$ вблизи нижнего предела. Полагая в экспоненте

$$\varepsilon(p)\approx\varepsilon(p_m)+\left.\frac{d\varepsilon}{dp}\right|_{p=p_m}(p-p_m)=\varepsilon(p_m)+\frac{\omega}{k}(p-p_m)$$

(а в предэкспоненциальном множителе $p\approx p_m$, $v\approx\omega/k$) и интегрируя по $p-p_m$ от 0 до $\infty$, получим

$$\varepsilon_l''=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega\Omega_e^2}{(kv_{Te})^3}\,\frac{1}{1-(\omega/kc)^2}\exp\left\{-\frac{mc^2}{T_e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\omega/kc)^2}}-1\right]\right\}.$$

Этим определяется закон обращения $\varepsilon_l''$ в нуль при $\omega/ck\to 1$.

## § 32. Продольные плазменные волны

Пространственная дисперсия приводит к возможности распространения в плазме продольных электрических волн. Зависимость частоты от волнового вектора (или, как говорят, *закон* *дисперсии*) для этих волн определяется уравнением

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0. \tag{32,1}$$

Действительно, при $\varepsilon_l = 0$ для продольного электрического поля $\mathbf{E}$ имеем $\mathbf{D} = 0$. Положив также $\mathbf{B} = 0$, мы тождественно удовлетворим второй паре уравнений Максвелла (28,2). Из первой же пары остается уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, выполнение которого обеспечивается продольностью поля: $\operatorname{rot}\mathbf{E} = i[\mathbf{kE}] = 0$.

Корни уравнения (32,1) оказываются комплексными ($\omega = \omega' + i\omega''$). Если мнимая часть проницаемости $\varepsilon_l'' > 0$, то эти корни лежат в нижней полуплоскости комплексного переменного $\omega$, т. е. $\omega'' < 0$. Величина $\gamma = -\omega''$ представляет собой декремент затухания волны, происходящего по закону $e^{-\gamma t}$. Говорить о распространяющейся волне можно, конечно, лишь если $\gamma \ll \omega'$ — декремент затухания должен быть мал по сравнению с частотой.

Мы получим такой корень уравнения (32,1), предположив, что

$$\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}. \tag{32,2}$$

Тогда в колебаниях участвуют лишь электроны и функция $\varepsilon_l(\omega, k)$ дается формулой (31,7). Решение уравнения $\varepsilon_l = 0$ осуществляется последовательными приближениями. В первом приближении, опустив все зависящие от $k$ члены, найдем, что[1])

$$\omega = \Omega_e, \tag{32,3}$$

т. е. волны имеют постоянную, не зависящую от $k$ частоту. Эти волны называют *плазменными*, или ленгмюровскими (*I. Langmuir*, *L. Tonks*, 1926). Они являются длинноволновыми в том смысле, что

$$ka_e \ll 1, \tag{32,4}$$

как это следует при $\omega = \Omega_e$ из (32,2).

Для определения зависящей от $k$ поправки в вещественной части частоты, достаточно положить $\omega = \Omega_e$ в поправочном члене в $\varepsilon'$; тогда получим

$$\omega = \Omega_e\left(1 + \frac{3}{2}k^2a_e^2\right) \tag{32,5}$$

(*А. А. Власов*, 1938).

Мнимая же часть частоты при этом

$$\omega'' = -\frac{1}{2}\Omega_e\varepsilon_l''(\omega, k) \tag{32,6}$$

и экспоненциально мала вместе с $\varepsilon_l''$. Для ее определения (вместе с предэкспоненциальным множителем) надо подставить в $\varepsilon_l''$ уже

[1]) Учет колебаний ионов привел бы лишь к малому сдвигу этой частоты: $\omega^2 = \Omega_e^2 + \Omega_i^2$.

подправленное значение (32,5). В результате получим

$$\gamma=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\Omega_e}{(ka_e)^3}\exp\left[-\frac{1}{2(ka_e)^2}-\frac{3}{2}\right] \tag{32,7}$$

(*Л. Д. Ландау*, 1946). В силу условия $ka_e \ll 1$, декремент затухания плазменных волн действительно оказывается экспоненциально малым. Он возрастает с уменьшением длины волны и при $ka_e \sim 1$ (когда формула (32,7) уже неприменима) становится того же порядка величины, что и частота, так что понятие о распространяющихся плазменных волнах теряет смысл.

Проведенное рассмотрение относится, строго говоря, лишь к изотропной плазме, в которой тензор диэлектрической проницаемости сводится, согласно (28,7), к двум скалярным величинам $\varepsilon_l$ и $\varepsilon_t$. В анизотропной плазме (т. е. при зависящей от направления $\mathbf{p}$ функции распределения $f(\mathbf{p})$) не существует строго продольных волн. При определенных условиях, однако, в ней могут распространяться «почти продольные» волны, в которых поперечная по отношению к вектору $\mathbf{k}$ составляющая поля, $\mathbf{E}^{(t)}$, мала по сравнению с продольной составляющей $\mathbf{E}^{(l)}$:

$$E^{(t)} \ll E^{(l)}. \tag{32,8}$$

Для выяснения этих условий замечаем прежде всего, что в пренебрежении $\mathbf{E}^{(t)}$ из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ следует, что

$$\mathbf{kD} \approx k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(l)} = \frac{1}{k} k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E^{(l)} = 0.$$

Это равенство, определяющее закон дисперсии волн, можно снова записать в виде (32,1), если определить «продольную» проницаемость как

$$\varepsilon_l = \frac{1}{k^2} k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}; \tag{32,9}$$

подчеркнем, что эта величина зависит теперь от направления $\mathbf{k}$. Однако из условия $\varepsilon_l=0$ уже не следует равенство $\mathbf{D}=0$; величина

$$D_\alpha \approx \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(l)} = \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{k_\beta}{k} E^{(l)} \equiv \varepsilon_\alpha E^{(l)}$$

отлична от нуля (в изотропной же плазме $\varepsilon_\alpha \equiv 0$ при $\varepsilon_l=0$). Далее, из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{B}=c^{-1}\partial\mathbf{D}/\partial t$ находим оценку магнитного поля в волне:

$$B \sim \frac{\omega}{ck}\varepsilon E^{(l)}$$

и затем из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{B}/\partial t$ — оценку поперечного электрического поля

$$E^{(t)} \sim \frac{\omega}{ck} B \sim \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2 \varepsilon E^{(l)}. \tag{32,10}$$

Таким образом, условие «почти продольности» (32,8) удовлетворяется, если волна является «медленной» в том смысле, что

$$\omega/k \ll c/\sqrt{\varepsilon}. \tag{32,11}$$

Отметим, наконец, что формула (29,10) остается справедливой и для определенной согласно (32,9) величины $\varepsilon_l$ в случае анизотропной плазмы, как это ясно из ее вывода из выражения

$$\mathbf{kP} = \frac{1}{4\pi}(k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta - \mathbf{kE})$$

с продольным полем $\mathbf{E}$. При этом существенно, что в кинетическом уравнении можно пренебречь лоренцевой силой $e[\mathbf{vB}]/c$ по сравнению с $e\mathbf{E}$ (хотя ее произведение с $\partial f/\partial\mathbf{p}$ и не обращается теперь — при анизотропной функции $f(\mathbf{p})$ — тождественно в нуль). Действительно, с оценкой (32,10) имеем

$$\frac{|[\mathbf{vB}]|}{cE^{(l)}} \sim \frac{\omega\varepsilon\bar{v}}{kc^2} \ll 1.$$

Это отношение мало как в силу условия «медленности» волны (32,11), так и в силу $\bar{v} \ll c$.

### Задачи

1. Определить закон дисперсии поперечных колебаний плазмы.

Решение. Для поперечных волн закон дисперсии дается соотношением $\omega^2 = c^2k^2/\varepsilon_t$. Высокочастотные колебания ($\omega \gg kv_{Te}$) соответствуют обычным электромагнитным волнам. С $\varepsilon_t$ из (31,9) (см. также задачу 2 § 31) находим

$$\omega^2 = c^2k^2 + \Omega_e^2.$$

Это выражение справедливо для любых значений $k$; затухание Ландау отсутствует, как уже было указано в конце § 31.

Для низкочастотных колебаний ($\omega \ll kv_{Te}$) движение ионов тоже оказывается несущественным. Для длинных волн ($ka_e \ll 1$) главный член в законе дисперсии

$$\omega = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k^3c^2v_{Te}}{\Omega_e^2};$$

чисто мнимое $\omega$ означает апериодическое затухание, так что о распространении волн вообще нельзя говорить.

2. Найти закон дисперсии плазменных волн в ультрарелятивистской электронной плазме (*В. П. Силин*, 1960).

Решение. При $\omega \gg ck$ из полученной в задаче 3 § 31 формулы имеем

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega_{e\,\text{рел}}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2c^2}{\omega^2}\right),$$

где

$$\Omega_{e\,\text{рел}}^2 = \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e}.$$

Приравняв это выражение нулю, получим закон дисперсии

$$\omega^2 = \Omega_{e\,\text{рел}}^2 + \frac{3}{5}c^2k^2 \qquad (ck \ll \Omega_{e\,\text{рел}}).$$

При увеличении $k$ эта формула становится неприменимой, но всегда остается $\omega > ck$ (и поэтому затухание Ландау отсутствует). В предельном случае больших $k$ частота $\omega$ стремится к $ck$ по закону

$$\omega = ck\left[1 + 2\exp\left(-\frac{2k^2c^2}{3\Omega_{e\,\text{рел}}^2} - 2\right)\right].$$

3. То же для поперечных волн.

Решение. С помощью выражения $\varepsilon_t(\omega, k)$, полученного в задаче 3 § 31, находим закон дисперсии

$$\omega^2 = \Omega_{e\,\text{рел}}^2 + \frac{6}{5}c^2k^2 \quad \text{при} \quad \omega \gg ck.$$

Предельное выражение при больших $k$:

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\Omega_{e\,\text{рел}}^2 + c^2k^2.$$

И здесь всегда остается $\omega > ck$, и потому затухание отсутствует.

## § 33. Ионно-звуковые волны

Наряду с плазменными волнами, связанными с колебаниями электронов, в плазме могут распространяться также и волны, в которых испытывают существенные колебания как электронная, так и ионная плотности. Эта ветвь спектра колебаний имеет слабое затухание (и потому можно говорить об их волновом распространении) в случае, когда температура газа ионов в плазме мала по сравнению с температурой электронов:

$$T_i \ll T_e. \tag{33,1}$$

Как будет подтверждено результатом вычисления, фазовая скорость этих волн удовлетворяет неравенствам

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \tag{33,2}$$

Малость затухания Ландау в этих условиях заранее очевидна: поскольку фазовая скорость лежит вне основных интервалов