Решение. При $\omega \gg ck$ из полученной в задаче 3 § 31 формулы имеем

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega_{e\,\text{рел}}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2c^2}{\omega^2}\right),$$

где

$$\Omega_{e\,\text{рел}}^2 = \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e}.$$

Приравняв это выражение нулю, получим закон дисперсии

$$\omega^2 = \Omega_{e\,\text{рел}}^2 + \frac{3}{5}c^2k^2 \qquad (ck \ll \Omega_{e\,\text{рел}}).$$

При увеличении k эта формула становится неприменимой, но всегда остается $\omega > ck$ (и поэтому затухание Ландау отсутствует). В предельном случае больших k частота ω стремится к ck по закону

$$\omega = ck\left[1 + 2\exp\left(-\frac{2k^2c^2}{3\Omega_{e\,\text{рел}}^2} - 2\right)\right].$$

3. То же для поперечных волн.

Решение. С помощью выражения $\varepsilon_t(\omega, k)$, полученного в задаче 3 § 31, находим закон дисперсии

$$\omega^2 = \Omega_{e\,\text{рел}}^2 + \frac{6}{5}c^2k^2 \quad \text{при} \quad \omega \gg ck.$$

Предельное выражение при больших k:

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\Omega_{e\,\text{рел}}^2 + c^2k^2.$$

И здесь всегда остается $\omega > ck$, и потому затухание отсутствует.

§ 33. Ионно-звуковые волны

Наряду с плазменными волнами, связанными с колебаниями электронов, в плазме могут распространяться также и волны, в которых испытывают существенные колебания как электронная, так и ионная плотности. Эта ветвь спектра колебаний имеет слабое затухание (и потому можно говорить об их волновом распространении) в случае, когда температура газа ионов в плазме мала по сравнению с температурой электронов:

$$T_i \ll T_e. \tag{33,1}$$

Как будет подтверждено результатом вычисления, фазовая скорость этих волн удовлетворяет неравенствам

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \tag{33,2}$$

Малость затухания Ландау в этих условиях заранее очевидна: поскольку фазовая скорость лежит вне основных интервалов разброса тепловых скоростей как ионов, так и электронов, лишь малая часть частиц может двигаться в фазе с волной и тем самым участвовать в обмене энергий с ней.

Вклад электронов в диэлектрическую проницаемость в условиях (33,2) дается предельной формулой (31,10), а вклад ионов — формулой (31,7) (с заменой электронных величин ионными). С нужной точностью:

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{(ka_e)^2}\left[1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right]. \qquad (33,3)$$

Пренебрегая сначала относительно малой мнимой частью, из уравнения $\varepsilon_l = 0$ получим

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k^2a_e^2}{1+k^2a_e^2} = \frac{zT_e}{M}\frac{k^2}{1+k^2a_e^2} \qquad (33,4)$$

(в последнем выражении использовано, что $N_e = zN_i$).

Для самых длинных волн, при условии $ka_e \ll 1$, закон дисперсии (33,4) сводится к соотношению[1])

$$\omega = k\sqrt{\frac{zT_e}{M}}, \quad ka_e \ll 1. \qquad (33,5)$$

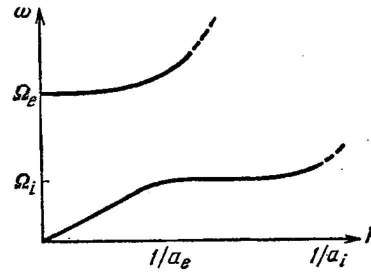

Рис. 8.

Частота оказывается пропорциональной волновому вектору — как в обычных звуковых волнах. Волны с этим законом дисперсии называют *ионно-звуковыми*. Фазовая скорость этих волн $\omega/k \sim (T_e/M)^{1/2}$, так что условие (33,2) действительно выполняется. Учитывая в следующем приближении мнимую часть ε_l, легко найти декремент затухания

$$\gamma = \omega\sqrt{\frac{\pi zm}{8M}}. \qquad (33,6)$$

Это затухание обусловлено электронами. Вклад же ионов в γ экспоненциально мал: он содержит множитель $\exp(-zT_e/2T_i)$.

Для меньших длин волн, в области $1/a_e \ll k \ll 1/a_i$ (существующей в силу предположенного неравенства (33,1)), из (33,4) имеем просто

$$\omega \approx \Omega_i. \qquad (33,7)$$

Это — ионные волны, аналогичные электронным плазменным. Легко проверить, что и здесь выполняются условия (33,2), а

---

[1]) Закон (33,5) найден *Ленгмюром* и *Тонксом* (1926), а необходимость условия (33,1) указана *Г. В. Гордеевым* (1954).

затухание мало. При дальнейшем уменьшении длин волн, однако, затухание возрастает, и при $ka_i \gtrsim 1$ ионный вклад в декремент затухания сравнивается с частотой, так что говорить о распространении волн становится невозможным.

На рис. 8 схематически изображен спектр (закон дисперсии) для рассмотренных здесь низкочастотных колебаний (нижняя кривая) в сравнении со спектром высокочастотных электронных плазменных волн (верхняя кривая). Пунктиром намечены области, в которых затухание становится большим.

§ 34. Релаксация начального возмущения

Рассмотрим задачу о решении кинетического уравнения с самосогласованным полем при заданных начальных условиях (*Л. Д. Ландау*, 1946). Мы ограничимся случаем чисто потенциального электрического поля ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) при равном нулю магнитном поле и предположим, что возмущению подвергается только электронное распределение при неизменном распределении ионов.

Будем также считать, что начальное возмущение мало: начальная функция распределения электронов

$$f(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(p) + g(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{34,1}$$

где $f_0(p)$ — равновесное (максвелловское) распределение, а $g \ll f_0$. Возмущение остается, конечно, малым и в дальнейшие моменты времени, так что уравнения можно линеаризовать; ищем функцию распределения в виде

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(p) + \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{34,2}$$

Для малой поправки δf и для потенциала самосогласованного поля $\varphi(t, \mathbf{r})$ (величина того же порядка малости) находим систему уравнений, составленную из кинетического уравнения

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{r}} + e\nabla\varphi\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{34,3}$$

и уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi e \int \delta f\, d^3p \tag{34,4}$$

(равновесный электронный заряд компенсирован зарядом ионов).

Поскольку эти уравнения линейны и не содержат координат в явном виде, то искомые функции δf и φ можно разложить в интеграл Фурье по координатам и написать уравнения для каждой из их фурье-компонент в отдельности. Другими словами, достаточно рассматривать решения вида

$$\delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})e^{i\mathbf{kr}}, \quad \varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kr}}. \tag{34,5}$$