

затухание мало. При дальнейшем уменьшении длин волн, однако, затухание возрастает, и при $ka_i \gg 1$ ионный вклад в декремент затухания сравнивается с частотой, так что говорить о распространении волн становится невозможным.

На рис. 8 схематически изображен спектр (закон дисперсии) для рассмотренных здесь низкочастотных колебаний (нижняя кривая) в сравнении со спектром высокочастотных электронных плазменных волн (верхняя кривая). Пунктиром намечены области, в которых затухание становится большим.

§ 34. Релаксация начального возмущения

Рассмотрим задачу о решении кинетического уравнения с самосогласованным полем при заданных начальных условиях (Л. Д. Ландау, 1946). Мы ограничимся случаем чисто потенциального электрического поля ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) при равном нулю магнитном поле и предположим, что возмущению подвергается только электронное распределение при неизменном распределении ионов.

Будем также считать, что начальное возмущение мало: начальная функция распределения электронов

$$f(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + g(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (34,1)$$

где $f_0(\mathbf{p})$ — равновесное (максвелловское) распределение, а $g \ll f_0$. Возмущение остается, конечно, малым и в дальнейшие моменты времени, так что уравнения можно линеаризовать; ищем функцию распределения в виде

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (34,2)$$

Для малой поправки δf и для потенциала самосогласованного поля $\varphi(t, \mathbf{r})$ (величина того же порядка малости) находим систему уравнений, составленную из кинетического уравнения

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + e \nabla \varphi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (34,3)$$

и уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e \int \delta f d^3p \quad (34,4)$$

(равновесный электронный заряд компенсирован зарядом ионов).

Поскольку эти уравнения линейны и не содержат координат в явном виде, то искомые функции δf и φ можно разложить в интеграл Фурье по координатам и написать уравнения для каждой из их фурье-компонент в отдельности. Другими словами, достаточно рассматривать решения вида

$$\delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (34,5)$$

Для таких решений уравнения (34,3—4) принимают вид

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}f_{\mathbf{k}} + ie\varphi_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (34,6)$$

$$k^2\varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi e \int f_{\mathbf{k}} d^3p. \quad (34,7)$$

Для решения этих уравнений удобно воспользоваться одно-сторонним преобразованием Фурье, определив образ $f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p})$ функции $f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})$ как

$$f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) dt. \quad (34,8)$$

Обратное преобразование дается формулой

$$f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (34,9)$$

где интеграл берется в комплексной плоскости ω по прямой, параллельной вещественной оси и проходящей над ней ($\sigma > 0$), выше всех особенностей функции $f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$.

Умножаем обе стороны уравнения (34,6) на $e^{-i\omega t}$ и интегрируем по t . Заметив, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} e^{i\omega t} dt = f_{\mathbf{k}} e^{i\omega t} \Big|_0^{\infty} - i\omega \int_0^{\infty} f_{\mathbf{k}} e^{i\omega t} dt = -g_{\mathbf{k}} - i\omega f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$$

(где $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \equiv f_{\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})$), и разделив обе стороны уравнения на $i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)$, находим

$$f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{1}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \left[g_{\mathbf{k}} - ie\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}\mathbf{k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right]. \quad (34,10)$$

Аналогичным образом, из (34,7) получим

$$k^2\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -4\pi e \int f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) d^3p. \quad (34,11)$$

¹⁾ Преобразование (34,8—9) есть не что иное, как известное преобразование Лапласа

$$f_{\mathbf{p}} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} f_{\mathbf{p}} e^{pt} d\mathbf{p},$$

в котором переменная p заменена на $-i\omega$ и соответственно изменен путь интегрирования в формуле восстановления функции $f(t)$ по ее образу $f_{\mathbf{p}}$.

Подставив $f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$ из (34,10) в (34,11), получим уравнение уже для одного только $\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$; из него найдем

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \epsilon_l(\omega, k)} \int \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) d^3 p}{i(kv - \omega)}, \quad (34,12)$$

где введена продольная диэлектрическая проницаемость ϵ_l согласно (29,9). Снова (как и в § 29) введя составляющую импульса $p_x = mv_x$ вдоль направления \mathbf{k} , перепишем эту формулу в виде

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \epsilon_l(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\mathbf{k}}(p_x) dp_x}{i(kv_x - \omega)}, \quad (34,13)$$

где

$$g_{\mathbf{k}}(p_x) = \int g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) dp_y dp_z.$$

Для дальнейшего определения временной зависимости потенциала по формуле обращения

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} d\omega \quad (34,14)$$

необходимо предварительно установить аналитические свойства $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ как функции комплексной переменной ω .

Выражение вида

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = \int_0^{\infty} \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\omega t} dt$$

как функция комплексной переменной ω имеет смысл лишь в верхней полуплоскости. То же относится соответственно и к выражению (34,13). Интегрирование в (34,13) производится по пути (вещественная ось p_x), проходящему ниже полюса $p_x = t\omega/k$. Мы видели в § 29, что определяемая таким интегралом функция переменной ω при ее аналитическом продолжении в нижнюю полуплоскость имеет особенности лишь в точках, совпадающих с особыми точками функции $g_{\mathbf{k}}(p_x)$. Будем считать, что $g_{\mathbf{k}}(p_x)$ как функция комплексной переменной p_x есть целая функция (т. е. не имеет никаких особенностей при конечных p_x); тогда и рассматриваемый интеграл определяет целую функцию ω .

В § 31 было отмечено, что проницаемость ϵ_l максвелловской плазмы — тоже целая функция ω . Таким образом, аналитическая во всей плоскости ω функция $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ есть частное двух целых функций. Отсюда следует, что единственными особенностями

(полюсами) функции $\varphi_{\omega k}$ являются нули ее знаменателя, т. е. нули функции $\varepsilon_l(\omega, k)$.

Эти соображения позволяют установить асимптотический закон убывания потенциала $\varphi_k(t)$ при больших временах t . В формуле обращения (34,14) интегрирование производится по горизонтальной прямой в плоскости ω . Однако, понимая под $\varphi_{\omega k}$ определенную указанным образом во всей плоскости аналитическую функцию, мы можем сместить путь интегрирования в нижнюю полуплоскость так, чтобы не пересечь при этом ни одного из полюсов функции. Пусть $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$ — тот из корней уравнения $\varepsilon_l(\omega, k) = 0$, который обладает наименьшей по величине мнимой частью (т. е. ближайший к вещественной оси). Будем производить интегрирование в (34,14) по пути, смещенному достаточно далеко под точку $\omega = \omega_k$ и огибающему эту точку

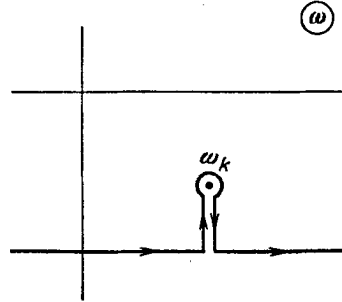


Рис. 9.

(а также и другие полюсы, лежащие сверху от него) указанным на рис. 9 образом. Тогда в интеграле будет существовать (при больших t) только вычет относительно полюса ω_k ; остальные части интеграла, в том числе интеграл по горизонтальной части пути, будут экспоненциально малы по сравнению с указанным вычетом благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $e^{-i\omega t}$, быстро убывающего при увеличении $|\text{Im } \omega|$. Таким образом, асимптотический закон убывания потенциала дается выражением

$$\varphi_k(t) \sim e^{-i\omega'_k t} e^{-|\omega''_k| t}, \quad (34,15)$$

т. е. с течением времени возмущение поля затухает экспоненциально с декрементом $\gamma_k = |\omega''_k|^1$.

Для длинноволновых возмущений ($ka_e \ll 1$) частота ω'_k и декремент γ_k совпадают с таковыми для плазменных волн и даются формулами (32,5—6). Декремент затухания таких возмущений экспоненциально мал. В обратном же случае коротковолновых

1) Если начальная функция $g_k(p_x)$ имеет особенность, то в число конкурирующих значений ω входят наряду с нулями функции $\varepsilon_l(\omega, k)$ также и особые точки функции $\varphi_{\omega k}$, возникающие от особенности интеграла в (34,13). В частности, если $g_k(p_x)$ имеет особенность (например, излом) на вещественной оси, то и $\varphi_{\omega k}$ будет иметь особенность при вещественном значении $\omega = kv_x$. Такое возмущение (в бесстолкновительной плазме!) вообще не будет затухать.

возмущений, когда $ka_e \sim 1$, затухание становится очень сильным; декремент γ_k даже велик по сравнению с ω'_k ¹⁾.

Наконец, остановимся на свойствах самой функции распределения электронов. Искомая функция $f_k(t, \mathbf{p})$ получается подстановкой (34,10) в интеграл (34,9). Помимо полюсов в нижней полуплоскости, происходящих от $\Phi_{\omega k}$, подынтегральное выражение имеет также полюс в точке $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ на вещественной оси. Именно этот полюс и будет определять асимптотическое поведение интеграла при больших t . По вычету в нем находим

$$f_k(t, \mathbf{p}) \sim e^{-ikvt}. \quad (34,16)$$

Таким образом, возмущение функции распределения не затухает с течением времени. Распределение становится, однако, все более быстро осциллирующей функцией скорости (период осцилляций по скорости $\sim 1/kt$). Поэтому возмущение плотности (т. е. интеграл $\int f_k d^3p$) затухает, как и потенциал Φ_k ²⁾.

Эволюция функции распределения согласно (34,16) относится ко времени, когда поле можно считать затухшим; формула (34,16) соответствует просто свободному разлету частиц — каждая со своей постоянной скоростью. Действительно, функция вида

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}\mathbf{v}t)} \quad (34,17)$$

есть решение кинетического уравнения свободных частиц

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (34,18)$$

при заданном начальном ($t=0$) распределении по скоростям и периодическом ($\sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$) распределении по координатам.

§ 35. Плазменное эхо

Термодинамически обратимый характер затухания Ландау проявляется в своеобразных нелинейных явлениях, называемых *плазменным эхом*. Эти явления возникают в результате тех не-

¹⁾ Может возникнуть вопрос о том, откуда возникает большое затухание, если «фазовая скорость» ω'_k/k лежит вне основного интервала тепловых скоростей. В действительности, однако, при $\gamma > \omega'$ об отношении ω'/k вообще нельзя говорить как о фазовой скорости. Если снова разложить функцию вида $e^{-i\omega' t} e^{-\gamma t}$ в интеграл Фурье, то в нем будут присутствовать компоненты с частотами во всем интервале от 0 до γ и соответственно с «фазовыми скоростями» от 0 до $\sim \gamma/k$.

²⁾ Забегая вперед, сразу же отметим, однако, что осциллирующий характер функции распределения при больших t приводит к сильному возрастанию эффективного числа кулоновских столкновений и тем самым ускоряет наступающее в конечном счете затухание возмущения (см. задачу к § 41).