возмущений, когда $ka_e \sim 1$, затухание становится очень сильным; декремент γ_k даже велик по сравнению с ω'_k[1]).

Наконец, остановимся на свойствах самой функции распределения электронов. Искомая функция $f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})$ получается подстановкой (34,10) в интеграл (34,9). Помимо полюсов в нижней полуплоскости, происходящих от $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$, подынтегральное выражение имеет также полюс в точке $\omega = \mathbf{kv}$ на вещественной оси. Именно этот полюс и будет определять асимптотическое поведение интеграла при больших t. По вычету в нем находим

$$f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) \propto e^{-i\mathbf{kv}t}. \tag{34,16}$$

Таким образом, возмущение функции распределения не затухает с течением времени. Распределение становится, однако, все более быстро осциллирующей функцией скорости (период осцилляций по скорости $\sim 1/kt$). Поэтому возмущение плотности (т. е. интеграл $\int f_{\mathbf{k}} d^3p$) затухает, как и потенциал $\varphi_{\mathbf{k}}$[2]).

Эволюция функции распределения согласно (34,16) относится ко времени, когда поле можно считать затухшим; формула (34,16) соответствует просто свободному разлету частиц — каждая со своей постоянной скоростью. Действительно, функция вида

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{p})\, e^{i(\mathbf{kr} - \mathbf{kv}t)} \tag{34,17}$$

есть решение кинетического уравнения свободных частиц

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{34,18}$$

при заданном начальном ($t = 0$) распределении по скоростям и периодическом ($\propto e^{i\mathbf{kr}}$) распределении по координатам.

§ 35. Плазменное эхо

Термодинамически обратимый характер затухания Ландау проявляется в своеобразных нелинейных явлениях, называемых *плазменным эхом*. Эти явления возникают в результате тех не-

[1]) Может возникнуть вопрос о том, откуда возникает большое затухание, если «фазовая скорость» ω'_k/k лежит вне основного интервала тепловых скоростей. В действительности, однако, при $\gamma > \omega'$ об отношении ω'/k вообще нельзя говорить как о фазовой скорости. Если снова разложить функцию вида $e^{-i\omega' t}e^{-\gamma t}$ в интеграл Фурье, то в нем будут присутствовать компоненты с частотами во всем интервале от 0 до γ и соответственно с «фазовыми скоростями» от 0 до $\sim \gamma/k$.

[2]) Забегая вперед, сразу же отметим, однако, что осциллирующий характер функции распределения при больших t приводит к сильному возрастанию эффективного числа кулоновских столкновений и тем самым ускоряет наступающее в конечном счете затухание возмущения (см. задачу к § 41).

затухающих осцилляций функции распределения (34,16), которые остаются после бесстолкновительной релаксации возмущений плотности (и поля) в плазме. Они имеют по существу кинематическое происхождение, не связанное с существованием в плазме самосогласованного электрического поля. Мы проиллюстрируем его сначала на примере газа из незаряженных частиц без столкновений.

Пусть в начальный момент времени в газе задано возмущение, в котором функция распределения, оставаясь по скоростям максвелловской в каждой точке пространства, меняется вдоль оси x по периодическому закону

$$\delta f = A_1 \cos k_1 x \cdot f_0(p) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{35,1}$$

(в этом параграфе $p = mv$ будет обозначать x-компоненту импульса; функция распределения предполагается уже проинтегрированной по p_y и p_z). По такому же закону меняется вдоль оси x (в тот же момент $t = 0$) и возмущение плотности газа, т. е. интеграл $\int \delta f \cdot dp$. В последующие моменты времени возмущение функции распределения будет меняться по закону

$$\delta f = A_1 \cos k_1 (x - vt) f_0(p), \tag{35,2}$$

отвечающему свободному перемещению каждой частицы вдоль оси x со своей скоростью v. Возмущение плотности, однако, затухнет (за время $\sim 1/v_T k_1$) ввиду погашения интеграла $\int \delta f\, dp$ за счет осциллирующего по скоростям множителя $\cos k_1 (x - vt)$ в подынтегральном выражении. Асимптотический закон этого затухания при временах $t \gg 1/k_1 v_T$ дается выражением

$$\delta N = \int \delta f\, dp \mathrel{\tilde{\propto}} \exp\left(-\frac{1}{2} k_1^2 v_T^2 t^2\right) \tag{35,3}$$

(оценка интеграла производится методом перевала).

Пусть теперь в некоторый момент времени $t = \tau \gg 1/k_1 v_T$ функция распределения снова промодулирована с амплитудой A_2 и некоторым новым волновым вектором $k_2 > k_1$. Возникшее возмущение плотности снова затухнет (за время $\sim 1/k_2 v_T$), но в момент

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \tau \tag{35,4}$$

возникнет вновь. Действительно, вторая модуляция приводит к появлению в функции распределения (в момент $t = \tau$) члена второго порядка вида

$$\delta f^{(2)} = A_1 A_2 \cos (k_1 x - k_1 v \tau) \cos k_2 x \cdot f_0(p). \tag{35,5}$$

Дальнейшая эволюция этого возмущения при $t > \tau$ превращает его в

$$\delta f^{(2)} = A_1 A_2 f_0(p) \cos[k_1 x - k_1 v t] \cos[k_2 x - k_2 v (t-\tau)] =$$
$$= \frac{1}{2} A_1 A_2 f_0(p) \{\cos[(k_2 - k_1) x - (k_2 - k_1) v t + k_2 v \tau] +$$
$$+ \cos[(k_2 + k_1) x - (k_2 + k_1) v t + k_2 v \tau]\}.$$

Теперь видно, что в момент $t = \tau'$ осциллирующая зависимость от v в первом члене исчезает, так что этот член даст конечный вклад в возмущение плотности газа с волновым вектором $k_2 - k_1$. Возникшее таким образом *эхо* затухнет затем в течение времени $\sim 1/v_T(k_2 - k_1)$, причем последняя стадия этого затухания происходит по закону, аналогичному (35,3).

Перейдем к исследованию этого явления в электронной плазме (*R. W. Gould, T. M. O'Neil, J. H. Malmberg*, 1967). Его механизм остается прежним, но конкретный закон затухания меняется из-за влияния самосогласованного поля.

Будем считать, что возмущения создаются импульсами некоторого внешнего (создаваемого «сторонними» зарядами) потенциала $\varphi^{(\text{ст})}$, прилагаемыми к плазме в моменты $t = 0$ и $t = \tau$:

$$\varphi^{(\text{ст})} = \varphi_1 \delta(t) \cos k_1 x + \varphi_2 \delta(t-\tau) \cos k_2 x; \qquad (35,6)$$

при этом предполагается, что $k_2 > k_1$, а $\tau \gg 1/k_1 v_T$, $1/\gamma(k_1)$ (где $\gamma(k)$ — декремент затухания Ландау).

Возмущение функции распределения ($f = f_0 + \delta f$) удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению, которое с учетом члена второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d f_0}{d p} = - e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial p}. \qquad (35,7)$$

При этом потенциал φ возникающего в плазме поля (включающий в себя также и «стороннюю» часть $\varphi^{(\text{ст})}$) удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\varphi - \varphi^{(\text{ст})}) = 4\pi e \int \delta f \, dp. \qquad (35,8)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде интегралов Фурье:

$$\delta f = \int f_{\omega' k'} e^{i(k'x - \omega' t)} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2},$$
$$\varphi = \int \varphi_{\omega'' k''} e^{i(k''x - \omega'' t)} \frac{d\omega'' dk''}{(2\pi)^2}.$$

Подставив эти выражения, умножив затем уравнение на $e^{-i(kx-\omega t)}$ и интегрируя их по $dx\,dt$, получим

$$(kv-\omega) f_{\omega k}+ek\varphi_{\omega k}\frac{df_0}{dp}=$$

$$=-e\int (k-k')\,\varphi_{\omega-\omega',\,k-k'}\frac{df_{\omega' k'}}{dp}\frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}, \qquad (35{,}9)$$

$$-k^2\varphi_{\omega k}=4\pi e\int f_{\omega k}dp-k^2\varphi^{(\text{ст})}_{\omega k}, \qquad (35{,}10)$$

где

$$\varphi^{(\text{ст})}_{\omega k}=\pi\varphi_1\left[\delta(k+k_1)+\delta(k-k_1)\right]+\pi\varphi_2\left[\delta(k+k_2)+\delta(k-k_2)\right]e^{i\omega\tau}.$$

В линейном приближении (т. е. при пренебрежении правой стороной в (35,9)) решение этих уравнений есть

$$f^{(1)}_{\omega k}=-e\frac{df_0}{dp}\frac{k}{kv-\omega}\varphi^{(1)}_{\omega k}, \qquad \varphi^{(1)}_{\omega k}=\frac{\varphi^{(\text{ст})}_{\omega k}}{\varepsilon_l(\omega, k)}, \qquad (35{,}11)$$

где ε_l—диэлектрическая проницаемость (29,10). Этому решению отвечают возмущения, затухающие от моментов времени $t=0$ и $t=\tau$ соответственно с декрементами $\gamma(k_1)$ и $\gamma(k_2)$.

Во втором приближении надо подставить (35,11) в правую сторону уравнения (35,9) и для членов второго порядка в возмущениях функции распределения и потенциала получаются уравнения

$$(kv-\omega) f^{(2)}_{\omega k}+ek\varphi^{(2)}_{\omega k}\frac{df_0}{dp}=\frac{dI_{\omega k}}{dp}, \qquad (35{,}12)$$

$$k^2\varphi^{(2)}_{\omega k}=-4\pi e\int f^{(2)}_{\omega k}\,dp, \qquad (35{,}13)$$

где

$$I_{\omega k}=-e\int (k-k')\,\varphi^{(1)}_{\omega-\omega',\,k-k'}\,f^{(1)}_{\omega' k'}\frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}. \qquad (35{,}14)$$

Интересующий нас эффект—эхо с волновым вектором k_2-k_1— будет заключен в членах в правой части (35,12), содержащих $\delta(k\pm(k_2-k_1))$. Соберем такие члены в выражении $I_{\omega k}$. К моменту времени $t=\tau$ возмущение $\varphi^{(1)}$, происходящее от приложенного при $t=0$ импульса φ_1, уже затухнет. Поэтому заранее очевидно, что при подстановке (35,11) в (35,14) надо учесть в $\varphi^{(1)}_{\omega k}$ лишь член с φ_2; интересующие нас члены вида

$$I_{\omega k}=I_\omega(k_1, k_2)\,\delta(k-k_2+k_1)+I_\omega(-k_1, -k_2)\,\delta(k+k_2-k_1) \qquad (35{,}15)$$

получатся при этом от членов в $f^{(1)}_{\omega k}$, содержащих φ_1. После выполнения интегрирования по dk' в (35,14) получим в результате[1])

$$I_\omega(k_1,\ k_2)=\frac{1}{4}e^2\varphi_1\varphi_2 k_1 k_2\frac{df_0}{dp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\omega-\omega')\tau}\,d\omega'}{(k_1v+\omega')\,\varepsilon_l(\omega',\ k_1)\,\varepsilon_l(\omega-\omega',\ k_2)},\tag{35,16}$$

причем, как всегда, переменную интегрирования ω' надо понимать как $\omega'+i0$[1]).

Интеграл (35,16) можно вычислить с учетом того, что τ предполагается большим ($\tau\gg 1/kv_T,\ 1/\gamma$). Для этого смещаем в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω' контур интегрирования, «зацепляющийся» при этом за полюсы подынтегрального выражения. Эти полюсы расположены в нулях функций ε_l и в точке $\omega'=-k_1v-i0$. Первые из них имеют отличные от нуля отрицательные мнимые части ($-\gamma(k_1)$ или $-\gamma(k_2)$), и вклады от них в интеграл (вычеты в полюсах) затухают с увеличением τ как $e^{-\gamma\tau}$. Незатухающий же вклад возникает только от вещественного полюса $\omega'=-k_1v-i0$. Таким образом, получим

$$I_\omega(k_1,\ k_2)=-e^2\frac{i\pi}{2}\frac{df_0}{dp}\frac{\varphi_1\varphi_2 k_1k_2e^{i(\omega+k_1v)\tau}}{\varepsilon_l(-k_1v,\ k_1)\,\varepsilon_l(\omega+k_1v,\ k_2)}.\tag{35,17}$$

Возвращаясь к уравнениям (35,12—13) и подставив $f^{(2)}_{\omega k}$ из первого уравнения во второе, находим

$$\varphi^{(2)}_{\omega k}=-\frac{4\pi e}{k^2\varepsilon_l(\omega,\ k)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dI_{\omega k}}{dp}\frac{dp}{kv-\omega-i0}.\tag{35,18}$$

При вычислении производной $dI_{\omega k}/dp$ надо дифференцировать только экспоненциальный множитель в (35,17), поскольку $k_1v_T\tau\gg 1$.

Собирая теперь полученные выражения (35,15—18) и совершая обратное преобразование Фурье, получим интересующий нас потенциал эха с волновым вектором $k_3=k_2-k_1$ в виде

$$\varphi^{(2)}(t,\ x)=\mathrm{Re}\,\{A(t)\,e^{ik_3x}\}.\tag{35,19}$$

Амплитуду $A(t)$ выпишем сразу в асимптотическом пределе при $t-\tau\to\infty$. В этом пределе интеграл по ω определяется вычетом подынтегрального выражения только в полюсе $\omega=k_3v-i0$. Окончательно находим

$$A(t)=-i\pi e^3\varphi_1\varphi_2\tau\frac{k_1^2k_2}{k_3^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{df_0}{dp}\frac{e^{-ivk_3(t-\tau')}\,dp}{\varepsilon_l(k_3v,\ k_3)\,\varepsilon_l(-k_1v,\ k_1)\,\varepsilon_l(k_2v,\ k_2)},\tag{35,20}$$

где $\tau'=k_2\tau/k_3$.

[1]) При вычислении следует иметь в виду, что ε_l зависит лишь от $|\mathbf{k}|$ и потому в обозначениях этого параграфа (где $k\equiv k_x$) имеем $\varepsilon_l(\omega,\ -k)=\varepsilon_l(\omega,\ k)$.

Это выражение—амплитуда эха—максимально при $t=\tau'$, причем максимальное значение пропорционально τ, т. е. промежутку времени между двумя импульсами. По обе стороны от максимума амплитуда $A(t)$ убывает, но по различным законам. Асимптотически при $t-\tau'\to\infty$ интеграл (35,20) определяется вычетом подынтегрального выражения в его полюсе с наименьшей по величине отрицательной мнимой частью; этот полюс лежит при $\varepsilon_l(k_3 v, k_3)=0$, и его мнимая часть $\operatorname{Im} v = -\gamma(k_3)/k_3$ [1]).

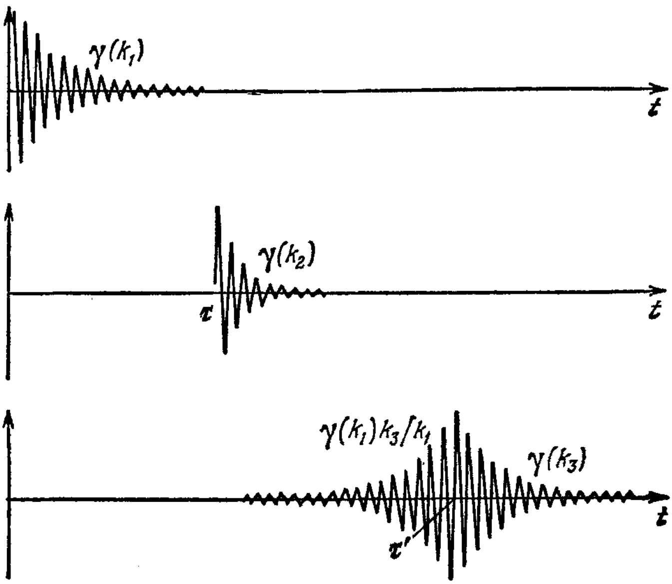

Рис. 10.

По другую же сторону от максимума, при $t-\tau'\to-\infty$, интеграл определяется вычетом в полюсе при $\varepsilon_l(-k_1 v, k_1)=0$, для которого $\operatorname{Im} v=\gamma(k_1)/k_1$ (путь интегрирования должен быть при этом смещен в верхнюю полуплоскость комплексного v). В результате находим, что

$$A(t)\sim\exp[-\gamma(k_3)(t-\tau')] \text{ при } t-\tau'\to\infty,$$
$$A(t)\sim\exp\left[-\frac{k_3}{k_1}\gamma(k_1)(\tau'-t)\right] \text{ при } t-\tau'\to-\infty. \quad (35,21)$$

Таким образом, амплитуда эха перед достижением его максимума возрастает с инкрементом $k_3\gamma(k_1)/k_1$, а за максимумом

[1]) Подразумевается, что все волновые векторы $k\ll 1/a_e$. Тогда $\gamma(k)$ экспоненциально мало и убывает с возрастанием k. Поскольку $k_3<k_2$, то полюс при $\varepsilon_l(k_2 v, k_2)=0$ в этих условиях заведомо лежит дальше от вещественной оси v, чем полюс при $\varepsilon_l(k_3 v, k_3)=0$.

убывает с декрементом $\gamma(k_3)$. Рис. 10 иллюстрирует рассмотренное явление: первые две кривые изображают ход изменения потенциала в двух импульсах, приложенных в моменты $t=0$ и $t=\tau$, а третья кривая — форму эха. Около кривых указаны соответствующий декремент или инкремент.

Изложенные расчеты произведены в пренебрежении столкновениями. Поэтому условие применимости количественной формулы (35,20) требует, чтобы к заданному моменту t осцилляции функции распределения не успели еще затухнуть под влиянием столкновений. Забегая вперед и воспользовавшись результатами задачи к § 41, можно сформулировать это условие в виде

$$\nu(v_T)(kv_T)^2 t^3 \ll 1, \tag{35,22}$$

где $\nu(v_T)$ — средняя частота кулоновских столкновений электрона.

§ 36. Адиабатический захват электронов

Рассмотрим вопрос о распределении электронов плазмы в медленно включаемом потенциальном электрическом поле. Пусть L — порядок величины протяженности поля, а τ — характерное время его изменения. Будем считать, что

$$\tau \gg L/\bar{v}_e. \tag{36,1}$$

В то же время будем предполагать τ малым по сравнению со временем свободного пробега электронов, так что речь идет по-прежнему о бесстолкновительной плазме.

В силу условия (36,1) поле можно считать стационарным в течение времени его пролета электроном. С этой же точностью будет стационарной также и функция распределения электронов в поле. Как было указано в конце § 27, решение бесстолкновительного кинетического уравнения зависит только от интегралов движения частицы; для стационарного распределения это могут быть только те интегралы, которые не зависят явно от времени.

Мы ограничимся одномерным случаем, когда потенциал поля φ зависит только от одной координаты x. Так как движение вдоль осей y и z при этом несущественно, речь будет идти о функции распределения f только по импульсу p_x (и по координате x).

В одномерном случае уравнение движения имеет два интеграла, из которых не зависит явно от времени (в стационарном поле) всего один — энергия электрона

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m} + U(x), \tag{36,2}$$