где

$$\Phi(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-u^2}\,du. \qquad (36,10)$$

При $\xi \ll 1$, разложив подынтегральное выражение в (36,10) по степеням u, имеем

$$\Phi(\xi)\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\xi-\frac{\xi^3}{3}\right).$$

Поэтому распределение электронов, захваченных в неглубокой яме ($|U| \ll T_e$), дается формулой

$$N_e=N_0\left[1+\frac{|U|}{T_e}-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{|U|}{T_e}\right)^{3/2}\right]. \qquad (36,11)$$

Первый поправочный член совпадает с тем, что получилось бы из формулы Больцмана (36,5). Но уже следующая поправка отличается от больцмановской.

При $\xi \gg 1$ разность $1-\Phi(\xi)$ экспоненциально мала ($\sim\exp(-\xi^2)$). Поэтому в случае глубокой ямы ($|U| \gg T_e$) в (36,9) существен лишь второй член в фигурных скобках, так что

$$N_e(t,\,x)=2N_0\left(\frac{|U|}{\pi T_e}\right)^{1/2}. \qquad (36,12)$$

С увеличением $|U|$ плотность возрастает гораздо медленнее, чем это следовало бы по формуле Больцмана.

§ 37. Квазинейтральная плазма

Уравнения динамики плазмы допускают далеко идущее упрощение для категории явлений, в которых характерные масштабы длин и времени удовлетворяют следующим условиям. Характерный размер неоднородностей в плазме L предполагается большим по сравнению с электронным дебаевским радиусом:

$$a_e/L \ll 1. \qquad (37,1)$$

Скорость же процесса предполагается определяющейся движением ионов, так что характерный масштаб скорости дается величиной v_{Ti}, малой по сравнению со скоростями электронов. Движение ионов приводит к медленному изменению электрического потенциала, за которым адиабатически следует распределение электронов.

Пусть δN_e и δN_i — изменения плотностей электронов и ионов в возмущенной плазме. Эти изменения создают в плазме среднюю плотность некомпенсированного заряда: $\delta\rho=e(z\delta N_i-\delta N_e)$. Потенциал создаваемого этими зарядами электрического поля определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e\,(z\delta N_i - \delta N_e). \tag{37.2}$$

По порядку величины $\Delta\varphi \sim \varphi/L^2$. Поэтому

$$\left|\frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e}\right| \sim \frac{1}{4\pi e L^2}\left|\frac{\varphi}{\delta N_e}\right|. \tag{37,3}$$

Если поле слабо ($e\varphi \ll T_e$), то изменение электронной плотности

$$\delta N_e \sim e\varphi N_e/T_e$$

(ср. (36,11)) и тогда

$$\left|\frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e}\right| \sim \frac{a_e^2}{L^2} \ll 1. \tag{37,4}$$

Это неравенство остается справедливым и в случае сильного возмущения, когда $e\varphi \sim T_e$; при этом $\delta N_e \sim N_e$ и из (37,3) снова следует (37,4).

Таким образом, возникающая при возмущении некомпенсированная плотность зарядов оказывается малой по сравнению с возмущениями плотностей зарядов электронов и ионов в отдельности; в таких случаях говорят о *квазинейтральной плазме*. Это свойство позволяет при изучении рассматриваемого круга явлений определять распределение потенциала в плазме, просто исходя из «уравнения квазинейтральности»

$$N_e = zN_i \tag{37,5}$$

совместно с кинетическим уравнением для ионов и с уравнением, выражающим «адиабатическое» распределение электронов [1]).

Разумеется, в начальный момент времени — если рассматривается задача с начальными условиями — плотности электронов могут быть заданы произвольно и не обязательно удовлетворяют неравенству (37,4). Возникающее при этом большое электрическое поле приведет, однако, к движению электронов, которое быстро, за характерные «электронные» времена, восстановит квазинейтральность (в диффузионном случае этот процесс прослежен в § 25).

Переход от электродинамического уравнения (37,2) к условию (37,5) означает не только существенное упрощение системы уравнений динамики плазмы, но и принципиальное изменение

[1]) Подчеркнем, что этот результат сам по себе относится как к бесстолкновительной плазме, так и к плазме со столкновениями. Заметим также, что, поскольку вывод неравенства (37,4) не связан с предположением о слабости поля, свойство квазинейтральности имеет место и в тех случаях, когда электромагнитные свойства плазмы не могут быть описаны с помощью диэлектрической проницаемости (т. е. в предположении линейной связи между **D** и **E**).

их размерностной структуры. Действительно, потенциал φ входит в кинетическое уравнение и в распределение электронов только в произведении с зарядом e, а в условие (37,5) (в противоположность уравнению (37,2)) заряд вообще не входит. Поэтому заменой

$$e\varphi \to \psi \tag{37,6}$$

заряд e вообще устраняется из уравнений, а вместе с ним исчезает также и параметр размерности длины — дебаевский радиус a_e.

Отсутствие в уравнениях параметра длины делает возможными автомодельные движения плазмы. Такие решения появляются в тех случаях, когда параметры размерности длины отсутствуют также и в начальных или граничных условиях задачи; тогда все функции могут зависеть от координат и времени только в комбинации $\mathbf{r}/t$. Пусть, например, плазма первоначально занимает полупространство $x < 0$. В момент времени $t = 0$ «убирается заслонка» и плазма начинает расширяться в пустоту. Сначала начинают двигаться электроны, так что электронная плотность образует вблизи границы переходный слой с характерной шириной $\sim a_e$. За время $t_1 \gg a_e/v_{Te}$ электронное движение затухает и далее электронная плотность следует адиабатически за потенциалом согласно формуле Больцмана. Теперь изменение всех величин определяется движением ионов. Благодаря этому за время $t_2 \gg a_e/v_{Ti} \gg a_e/v_{Te}$ граница размывается на расстояниях, больших по сравнению с a_e. К этому времени плазма становится квазинейтральной, а движение автомодельным.

Напишем уравнения динамики квазинейтральной плазмы в раскрытом виде, предположив для определенности, что распределение электронной плотности везде больцмановское:

$$N_e = N_0 e^{\psi/T_e}; \tag{37,7}$$

как было показано в § 36, это распределение не нарушается медленно меняющимся полем, если поле не содержит потенциальных ям. Формула (37,7) совместно с условием (37,5) позволяет прямо выразить потенциал через функцию распределения ионов:

$$\psi = T_e \ln \frac{zN_i}{N_0} = T_e \ln \left[\frac{z}{N_0} \int f_i d^3p\right]. \tag{37,8}$$

Подставив же это выражение в кинетическое уравнение для ионов (с самосогласованным полем $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), получим

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} - zT_e \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \int f_i d^3p = 0. \tag{37,9}$$

Отметим, что, несмотря на нелинейность этого уравнения, его решения не зависят от средней плотности плазмы: если $f_i(t, \mathbf{r})$

есть решение, то решением будет и Cf_i с произвольным постоянным множителем C.

Упомянем, что в одномерном случае уравнение (37,9) имеет класс решений, характерных тем, что в них функция $f_i(t, x, \mathbf{p})$ зависит от координаты x и времени t только через посредство некоторой функции $\chi(t, x)$:

$$f_i = f_i[\chi(t, x), \mathbf{p}]. \qquad (37,10)$$

Эти решения в известном смысле аналогичны простым волнам обычной гидродинамики[1]).

§ 38. Гидродинамика двухтемпературной плазмы

В особенности простое теоретическое описание допускает двухтемпературная плазма, в которой

$$T_e \gg T_i. \qquad (38,1)$$

Мы уже видели в § 33, что в этом случае в плазме могут распространяться незатухающие ионно-звуковые волны со скоростью $\sim(T_e/M)^{1/2}$. Эта же скорость будет вообще характерна для распространения возмущений в плазме. Поскольку в то же время она велика (в силу (38,1)) по сравнению с тепловыми скоростями ионов, то для большинства задач о движении плазмы можно вообще пренебречь тепловым разбросом скоростей ионов. Движение ионной компоненты плазмы будет тогда описываться в «гидродинамическом приближении» скоростью $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i$, задаваемой как функция точки в пространстве (и времени) и удовлетворяющей уравнению

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = ez\mathbf{E},$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{ez}{M}\mathbf{E}. \qquad (38,2)$$

К этому уравнению добавляется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div}(N_i\mathbf{v}) = 0 \qquad (38,3)$$

и уравнение Пуассона, определяющее потенциал электрического поля φ (а с ним и напряженность $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$):

$$\Delta\varphi = -4\pi e(zN_i - N_e). \qquad (38,4)$$

---

[1]) См. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.*— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1778.