есть решение, то решением будет и Cf_i с произвольным постоянным множителем C.

Упомянем, что в одномерном случае уравнение (37,9) имеет класс решений, характерных тем, что в них функция $f_i(t, x, \mathbf{p})$ зависит от координаты x и времени t только через посредство некоторой функции $\chi(t, x)$:

$$f_i = f_i[\chi(t, x), \mathbf{p}]. \tag{37,10}$$

Эти решения в известном смысле аналогичны простым волнам обычной гидродинамики[1]).

§ 38. Гидродинамика двухтемпературной плазмы

В особенности простое теоретическое описание допускает двухтемпературная плазма, в которой

$$T_e \gg T_i. \tag{38,1}$$

Мы уже видели в § 33, что в этом случае в плазме могут распространяться незатухающие ионно-звуковые волны со скоростью $\sim(T_e/M)^{1/2}$. Эта же скорость будет вообще характерна для распространения возмущений в плазме. Поскольку в то же время она велика (в силу (38,1)) по сравнению с тепловыми скоростями ионов, то для большинства задач о движении плазмы можно вообще пренебречь тепловым разбросом скоростей ионов. Движение ионной компоненты плазмы будет тогда описываться в «гидродинамическом приближении» скоростью $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i$, задаваемой как функция точки в пространстве (и времени) и удовлетворяющей уравнению

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = ez\mathbf{E},$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{ez}{M}\mathbf{E}. \tag{38,2}$$

К этому уравнению добавляется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div}(N_i\mathbf{v}) = 0 \tag{38,3}$$

и уравнение Пуассона, определяющее потенциал электрического поля φ (а с ним и напряженность $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$):

$$\Delta\varphi = -4\pi e(zN_i - N_e). \tag{38,4}$$

---

[1]) См. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.*— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1778.

Что же касается электронов, то при движениях плазмы со скоростями $v \lesssim (T_e/M)^{1/2} \ll v_{Te}$ их распределение адиабатически следует за распределением поля. Как мы видели в § 36, конкретное выражение для электронной плотности N_e при этом существенно зависит от характера поля. Для поля без потенциальных ям оно дается просто формулой Больцмана (37,7), так что уравнение (38,4) принимает вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e N_0 \left(\frac{zN_i}{N_0} - e^{e\varphi/T_e}\right). \tag{38,5}$$

Уравнения (38,2—3) и (38,5) составляют полную систему уравнений для функций $\mathbf{v}$, N и φ. Она может быть еще упрощена для квазинейтральной плазмы. В этом случае согласно (37,8) имеем

$$e\varphi = T_e \ln \frac{zN_i}{N_0}, \quad e\mathbf{E} = -T_e \frac{\nabla N_i}{N_i} \tag{38,6}$$

и (38,2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{zT_e}{M}\frac{\nabla N_i}{N_i}. \tag{38,7}$$

Система уравнений (38,3) и (38,7) формально тождественна уравнениям гидродинамики изотермического идеального газа с массой частиц M и температурой zT_e. Скорость звука в таком газе равна $(zT_e/M)^{1/2}$ — в соответствии с выражением (33,5) для скорости ионно-звуковых волн; дисперсия волн в этом приближении отсутствует.

Установленная аналогия с гидродинамикой нуждается в существенной оговорке. Как известно, система гидродинамических уравнений далеко не всегда имеет непрерывные во всем пространстве решения. Отсутствие непрерывного решения в обычной гидродинамике означает образование ударных волн — поверхностей, на которых физические величины испытывают разрывы. В бесстолкновительной гидродинамике не существует ударных волн, поскольку они по самой своей природе связаны с отсутствующей в данном случае диссипацией энергии. Отсутствие непрерывных решений означает здесь, что в некоторой области пространства нарушается предположение о квазинейтральности плазмы. В таких областях (их условно называют *бесстолкновительными ударными волнами*) зависимость физических величин от координат и времени оказывается осциллирующей, причем характерная длина волны этих осцилляций определяется не только характерными размерами задачи, но и внутренним свойством плазмы — ее дебаевским радиусом[1]).

[1]) См. *Сагдеев Р. З.* — Сборник «Вопросы теории плазмы», 1964, вып. 4, с. 20.

Вернемся к более общим уравнениям (38,2—4), не предполагающим квазинейтральности плазмы. Важным свойством этих уравнений является существование у них одномерных решений, в которых все величины зависят от переменных t и x только в комбинации $\xi = x - ut$ с постоянной u. Такие решения описывают волны, распространяющиеся со скоростью u без изменения своего профиля. Если перейти к системе отсчета, движущейся относительно исходной системы со скоростью u, то в этой системе движение плазмы будет стационарным. Наиболее интересными из решений этого типа являются решения, периодические в пространстве, и решения, убывающие в обе стороны на бесконечности. Рассмотрим здесь именно последние—так называемые *уединенные волны*, или *солитоны*[1]) (*А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев*, 1961).

Обозначив штрихом дифференцирование по ξ, получим из (38,2—3)

$$(v-u)\,v' = -\frac{e}{M}\varphi', \quad (N_i v)' - uN_i' = 0$$

(для упрощения полагаем $z = 1$).

Интегрируя эти уравнения с граничными условиями $\varphi = 0$, $v = 0$, $N_i = N_0$ при $\xi \to \infty$, найдем

$$\frac{e}{M}\varphi = \frac{u^2}{2} - \frac{(u-v)^2}{2}, \tag{38,8}$$

$$N_i = N_0\frac{u}{u-v} = N_0\frac{u}{[u^2 - 2e\varphi/M]^{1/2}}. \tag{38,9}$$

Уравнение же (38,4) дает $\varphi'' = -4\pi e(N_i - N_e)$, или, после умножения на $2\varphi'$ и интегрирования,

$$\varphi'^2 = -8\pi e\int_0^{\varphi}[N_i(\varphi) - N_e(\varphi)]\,d\varphi. \tag{38,10}$$

При этом функция $N_i(\varphi)$ берется из (38,9), а $N_e(\varphi)$ определяется формулами § 36. Отметим, что в рассматриваемой волне всегда $\varphi > 0$, как это видно из (38,8). Потенциальная энергия электрона в таком поле $U = -e\varphi < 0$, т. е. по отношению к электронам поле имеет характер потенциальной ямы.

Уравнением (38,10) задача об определении профиля волны $\varphi(\xi)$ сводится к квадратурам. При этом скорость u оказывается непосредственно связанной с амплитудой волны—максимальным значением функции $\varphi(\xi)$ (обозначим это значение через φ_m). Действительно, при $\varphi = \varphi_m$ должно быть $\varphi' = 0$. Приравняв нулю

[1]) От английского слова solitary—одинокий.

интеграл в правой стороне (38,10) (и осуществив в нем интегрирование первого члена), получим уравнение

$$\frac{Mu^2}{e}\left[1-\left(1-\frac{2e}{Mu^2}\varphi_m\right)^{1/2}\right]=\frac{1}{N_0}\int\limits_0^{\varphi_m} N_e(\varphi)\,d\varphi, \tag{38,11}$$

которое и определяет в принципе зависимость u от φ_m. При этом, очевидно, должно быть

$$2e\varphi_m/Mu^2<1. \tag{38,12}$$

Это условие, вообще говоря, устанавливает верхнюю границу возможных значений амплитуды волны φ_m (а с нею и скорости u).

Отметим еще, что для полного пренебрежения столкновениями необходимо, чтобы частота поля ω была велика по сравнению с характерными частотами соударений как электронов ν_e, так и ионов ν_i. Но поскольку $\nu_e \sim (M/m)^{1/2}\nu_i \gg \nu_i$ (см. § 43), то возможна ситуация, когда $\nu_e \gg \omega \gg \nu_i$. В таком случае столкновения по-прежнему не влияют на движение ионов, но распределение электронов можно считать больцмановским и при наличии потенциальных ям.

Задача

Определить профиль и скорость уединенной волны небольшой интенсивности ($e\varphi_m/T_e \ll 1$) в плазме с электронами, распределенными согласно (36,11) (*А. В. Гуревич*, 1967).

Решение. В (36,11) должны быть сохранены все члены; возникновение уединенной волны связано именно с последним, нелинейным членом в этом выражении. Вычисление по (38,11) приводит к результату

$$u^2=\frac{T_e}{M}\left[1+\frac{16}{15}\left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e}\right)^{1/2}\right].$$

Профиль волны находится интегрированием уравнения (38,10) и имеет вид

$$\varphi=\varphi_m\,\mathrm{ch}^{-4}\left[\frac{x}{\sqrt{15}\,a_e}\left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e}\right)^{1/4}\right].$$

§ 39. Солитоны в слабо диспергирующей среде

Существование (в среде без диссипации) нелинейных волн со стационарным профилем тесно связано с наличием дисперсии. В недиспергирующей среде учет нелинейности неизбежно нарушает стационарность волны; скорость распространения различных точек профиля оказывается зависящей от значения амплитуды в этих точках, что и приводит к искажению профиля. Так, в гидродинамике идеальной сжимаемой жидкости нелинейные эффекты приводят к постепенному увеличению крутизны переднего