интеграл в правой стороне (38,10) (и осуществив в нем интегрирование первого члена), получим уравнение

$$\frac{Mu^2}{e}\left[1-\left(1-\frac{2e}{Mu^2}\varphi_m\right)^{1/2}\right]=\frac{1}{N_0}\int\limits_0^{\varphi_m} N_e(\varphi)\,d\varphi, \qquad (38,11)$$

которое и определяет в принципе зависимость u от φ_m. При этом, очевидно, должно быть

$$2e\varphi_m/Mu^2 < 1. \qquad (38,12)$$

Это условие, вообще говоря, устанавливает верхнюю границу возможных значений амплитуды волны φ_m (а с нею и скорости u).

Отметим еще, что для полного пренебрежения столкновениями необходимо, чтобы частота поля ω была велика по сравнению с характерными частотами соударений как электронов ν_e, так и ионов ν_i. Но поскольку $\nu_e \sim (M/m)^{1/2}\nu_i \gg \nu_i$ (см. § 43), то возможна ситуация, когда $\nu_e \gg \omega \gg \nu_i$. В таком случае столкновения по-прежнему не влияют на движение ионов, но распределение электронов можно считать больцмановским и при наличии потенциальных ям.

Задача

Определить профиль и скорость уединенной волны небольшой интенсивности ($e\varphi_m/T_e \ll 1$) в плазме с электронами, распределенными согласно (36,11) (*А. В. Гуревич*, 1967).

Решение. В (36,11) должны быть сохранены все члены; возникновение уединенной волны связано именно с последним, нелинейным членом в этом выражении. Вычисление по (38,11) приводит к результату

$$u^2=\frac{T_e}{M}\left[1+\frac{16}{15}\left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e}\right)^{1/2}\right].$$

Профиль волны находится интегрированием уравнения (38,10) и имеет вид

$$\varphi=\varphi_m\,\mathrm{ch}^{-4}\left[\frac{x}{\sqrt{15}\,a_e}\left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e}\right)^{1/4}\right].$$

§ 39. Солитоны в слабо диспергирующей среде

Существование (в среде без диссипации) нелинейных волн со стационарным профилем тесно связано с наличием дисперсии. В недиспергирующей среде учет нелинейности неизбежно нарушает стационарность волны; скорость распространения различных точек профиля оказывается зависящей от значения амплитуды в этих точках, что и приводит к искажению профиля. Так, в гидродинамике идеальной сжимаемой жидкости нелинейные эффекты приводят к постепенному увеличению крутизны переднего фронта волны (см. VI, § 94). Дисперсия же, со своей стороны, приводит к постепенному расплыванию профиля, и оба влияния могут взаимно компенсироваться, приводя к стационарности профиля волны.

В этом параграфе мы изучим эти явления в общем виде для довольно широкой категории случаев распространения волн в бездиссипативной слабо диспергирующей среде с учетом слабой же нелинейности.

Пусть u_0—скорость распространения волны в линейном приближении, при пренебрежении дисперсией. В этом приближении в одномерной волне, распространяющейся в одну сторону вдоль оси x, все величины зависят от x и t только в комбинации $\xi=x-u_0t$. В дифференциальном виде это свойство выражается уравнением

$$\frac{\partial b}{\partial t}+u_0\frac{\partial b}{\partial x}=0,$$

где b обозначает какую-либо из колеблющихся в волне величин.

Постоянной скорости u_0 отвечает закон дисперсии волн $\omega=u_0k$. В диспергирующей среде этот закон представляет собой лишь первый член разложения функции $\omega(k)$ по степеням малого k. С учетом следующего члена имеем[1])

$$\omega=u_0k-\beta k^3, \tag{39,1}$$

где β—постоянная, которая может в принципе быть как положительной, так и отрицательной.

Дифференциальное уравнение, описывающее в линейном приближении распространение (в одну сторону) волны в среде с такой дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial b}{\partial t}+u_0\frac{\partial b}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 b}{\partial x^3}=0;$$

действительно, для волны, в которой $b\propto\exp(-i\omega t+ikx)$, отсюда получается (39,1).

Наконец, учет нелинейности приводит к появлению в уравнении членов более высокого порядка по b. Эти члены во всяком случае должны удовлетворять условию обращения в нуль при

---

[1]) Тот факт, что функция $\omega(k)$ разлагается по нечетным степеням k, следует уже из соображений вещественности. Исходная система физических уравнений движения среды содержит лишь вещественные величины и параметры. Мнимая единица i появляется лишь в результате подстановки в эти уравнения решения, пропорционального $\exp(-i\omega t+ikx)$. Поэтому возникающий в результате этой подстановки закон дисперсии определяет $i\omega$ в виде функции от ik с вещественными коэффициентами; разложение такой функции может содержать лишь нечетные степени от ik. В общем случае диссипирующей среды функция $\omega(k)$ комплексна ($\omega=\omega'+i\omega''$), и тогда сделанное утверждение относится к разложению вещественной части частоты, $\omega'(k)$. Разложение же функции $\omega''(k)$ по тем же причинам будет содержать лишь четные степени k.

постоянном (не зависящем от x) b, что отвечает просто однородной среде. Ограничившись членом с производной наиболее низкого порядка (малые k!), напишем уравнение распространения слабо нелинейной волны в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t}+u_0\frac{\partial b}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 b}{\partial x^3}+\alpha b\frac{\partial b}{\partial x}=0, \qquad (39,2)$$

где α — постоянный параметр (который тоже может в принципе иметь оба знака)[1]).

Для упрощения записи этого уравнения введем вместо x новую переменную ξ и вместо b — новую неизвестную функцию a, определив их согласно

$$\xi=x-u_0t, \quad a=\alpha b. \qquad (39,3)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial a}{\partial t}+a\frac{\partial a}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3}=0. \qquad (39,4)$$

В таком виде это уравнение называют уравнением *Кортевега — де Вриза* (КдВ)[2]). Будем считать сначала для определенности, что постоянная $\beta>0$.

Нас будут интересовать решения, описывающие волны со стационарным профилем. В таких решениях функция $a(t, \xi)$ зависит только от разности $\xi-v_0t$ с некоторым постоянным v_0:

$$a=a(\xi-v_0t); \qquad (39,5)$$

при этом скорость распространения волны есть

$$u=u_0+v_0. \qquad (39,6)$$

Подставив (39,5) в (39,4) и обозначив дифференцирование по ξ штрихом, получим уравнение

$$\beta a'''+aa'-v_0a'=0. \qquad (39,7)$$

Отметим, что оно инвариантно относительно замены

$$a\to a+V, \quad v_0\to v_0+V \qquad (39,8)$$

с произвольной постоянной V.

---

[1]) Подчеркнем, однако, во избежание недоразумений, что такой вид слабой нелинейности отнюдь не является универсальным. Так, слабая нелинейность для распространения волн в плазме, возникающая от последнего члена в электронном распределении (36,11) (использованном в задаче к § 38), соответствовала бы члену $\sim\sqrt{b}\,\partial b/\partial x$ в уравнении типа (39,2).

[2]) Оно было получено *Кортевегом* и *де Вризом* (*D. J. Korteweg*, *G. de Vries*, 1895) для волн на поверхности мелкой воды.

Первый интеграл уравнения (39,7):

$$\beta a'' + \frac{1}{2} a^2 - v_0 a = \frac{c_1}{2}.$$

Умножив это равенство на $2a'$ и интегрируя еще раз, получим

$$\beta a'^2 = -\frac{a^3}{3} + v_0 a^2 + c_1 a + c_2. \tag{39,9}$$

Вместо трех постоянных v_0, c_1, c_2 целесообразно ввести другие постоянные—три корня кубического трехчлена, стоящего в правой стороне (39,9). Обозначив эти корни через a_1, a_2, a_3, напишем

$$\beta a'^2 = -\frac{1}{3}(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3). \tag{39,10}$$

Постоянная v_0 связана с новыми постоянными равенством

$$v_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3). \tag{39,11}$$

Нас будут интересовать лишь такие решения уравнения (39,10), в которых величина $|a(\xi)|$ ограничена; неограниченный рост $|a|$ противоречил бы предположению о слабой нелинейности. Легко видеть, что это условие не выполняется, если среди корней a_1, a_2, a_3 имеются комплексные; пусть это будут a_1 и a_2 (причем $a_2 = a_1^*$). Действительно, в таком случае правая сторона (39,10) принимает вид $|a - a_1|^2 (a_3 - a)/3$ и ничто не мешает a стремиться к $-\infty$.

Таким образом, постоянные a_1, a_2, a_3 должны быть вещественными; расположим их в порядке $a_1 > a_2 > a_3$. Поскольку выражение в правой стороне уравнения (39,10) должно быть положительным, то функция $a(\xi)$ может меняться лишь в интервале $a_1 \geqslant a \geqslant a_2$. Без ограничения общности можно положить $a_3 = 0$; этого всегда можно достичь преобразованием вида (39,8). Условившись о таком выборе, перепишем уравнение (39,10) в виде

$$\beta a'^2 = \frac{1}{3}(a_1 - a)(a - a_2)\, a. \tag{39,12}$$

Решение этого уравнения имеет различный характер при $a_2 = 0$ и при $a_2 \neq 0$. В первом случае ($a_2 = 0$, $a_1 > 0$) интегрирование уравнения дает

$$a(\xi) = a_1 \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{a_1}{3\beta}}\right); \tag{39,13}$$

начало отсчета ξ выбрано в точке максимума функции (здесь и ниже мы пишем, для упрощения обозначений, профиль волны как функцию от $\xi = x$ в некоторый заданный момент времени

$t=0$). Это решение описывает уединенную волну (солитон): при $\xi\to\pm\infty$ функция $a(\xi)$ вместе со своими производными обращается в нуль. Постоянная a_1 дает амплитуду солитона, а его ширина убывает с ростом амплитуды как $a_1^{-1/2}$. Согласно (39,11) имеем $v_0=a_1/3$, так что скорость солитона

$$u=u_0+a_1/3. \tag{39,14}$$

Эта скорость $u>u_0$ и растет с увеличением амплитуды.

Снова напомним, что нелинейность процессов, описываемых уравнением КдВ, предполагается слабой. Условие этой малости имеет естественный смысл; так, если роль величины a играет изменение плотности среды, то это изменение должно быть малым по сравнению с невозмущенной плотностью. В то же время «степень нелинейности» этих процессов характеризуется еще и другим безразмерным параметром: $L(a_1/\beta)^{1/2}$, где L — характерная длина, а a_1 — амплитуда возмущения. Этот параметр определяет относительную роль эффектов нелинейности и дисперсии и может быть как малым (преобладание эффекта дисперсии), так и большим (преобладание эффекта нелинейности). Для солитона, ширина которого $L\sim(\beta/a_1)^{1/2}$, этот параметр порядка 1.

Перейдем к случаю $a_2\neq 0$; в этом случае решение уравнения (39,12) описывает периодическую в пространстве, бесконечно протяженную волну. Интегрирование уравнения дает

$$\xi=\int\limits_a^{a_1}\frac{\sqrt{3\beta}\,da}{[a(a_1-a)(a-a_2)]^{1/2}}=\left(\frac{12\beta}{a_1}\right)^{1/2}F(s,\varphi), \tag{39,15}$$

где $F(s,\varphi)$ — эллиптический интеграл первого рода:

$$F(s,\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-s^2\sin^2\varphi)^{1/2}}, \tag{39,16}$$

причем [1])

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{a_1-a}{a_1-a_2}},\qquad s=\sqrt{1-\frac{a_2}{a_1}}; \tag{39,17}$$

начало отсчета ξ выбрано в одном из максимумов функции $a(\xi)$.

Обращая формулу (39,15) путем введения эллиптической функции Якоби, получим

$$a=a_1\,\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{\frac{a_1}{12\beta}}\,\xi,\ s\right). \tag{39,18}$$

---

[1]) Параметр эллиптического интеграла обозначен буквой s (вместо обычно принятой k) во избежание путаницы с волновым вектором.

Эта функция периодична, причем ее период (длина волны) по координате x равен

$$\lambda = 4\sqrt{\frac{3\beta}{a_1}}\,F\left(\frac{\pi}{2},\ s\right) = 4\sqrt{\frac{3\beta}{a_1}}\,K(s), \qquad (39,19)$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Среднее по периоду значение функции (39,18):

$$\bar{a} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda a(\xi)\,d\xi = a_1\frac{E(s)}{K(s)}, \qquad (39,20)$$

где $E(s)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Естественно рассматривать периодическую волну, в которой среднее значение колеблющейся величины равно нулю. Этого всегда можно добиться преобразованием (39,8), вычитая величину (39,20) из функции (39,18). Скорость распространения волны равна тогда

$$u = u_0 + \left[\frac{a_1+a_2}{3} - a_1\frac{E(s)}{K(s)}\right]. \qquad (39,21)$$

Малым амплитудам колебаний $a_1 - a_2$ соответствуют значения параметра $s \ll 1$. Воспользовавшись приближенным выражением

$$\mathrm{dn}(z,\ s) \approx 1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4}\cos 2z, \qquad s \ll 1,$$

найдем, что решение (39,18) переходит в этом случае, как и следовало, в гармоническую волну

$$a = \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1-a_2}{2}\cos kx, \qquad k = \sqrt{\frac{a_1}{3\beta}}.$$

При этом скорость (39,21) становится равной $u = u_0 - a_1/3 = u_0 - \beta k^2$ в соответствии с (39,1).

Обратному предельному случаю больших амплитуд (в рассматриваемой модели волн) отвечают значения $a_2 \to 0$, причем параметр $s \to 1$. Имея в виду предельную формулу

$$K(s) \approx \frac{1}{2}\ln\frac{16}{1-s^2}, \qquad s^2 \to 1,$$

найдем, что в этом пределе длина волны возрастает по логарифмическому закону

$$\lambda = \sqrt{\frac{12\beta}{a_1}}\ln\frac{16a_1}{a_2}. \qquad (39,22)$$

Другими словами, последовательные пучности волны раздвигаются на большие расстояния друг от друга. Профиль волны вблизи каждой из них получается из (39,18) с помощью предельного выражения функции $\operatorname{dn} z$ при $s=1$, справедливой при конечных значениях z: $\operatorname{dn} z = 1/\operatorname{ch} z$. В результате мы возвращаемся к формуле (39,13). Таким образом, в пределе $s \to 1$ периодическая волна разбивается на совокупность следующих друг за другом удаленных солитонов.

До сих пор мы предполагали, что $\beta > 0$. Случай, когда постоянная $\beta < 0$ не требует особого рассмотрения: изменение знака β в уравнении (39,4) эквивалентно замене $\xi \to -\xi$, $a \to -a$. Поскольку при такой замене аргумент $\xi - v_0 t$ в (39,5) превращается в $-\xi - v_0 t$, то скорость распространения волны будет теперь $u = u_0 - v_0$. Так, для солитона полученные выше результаты изменятся лишь в том отношении, что функция $a(\xi)$ станет отрицательной, а его скорость $u < u_0$.

Уравнение КдВ обладает некоторыми специфическими свойствами, позволяющими установить для него ряд общих теорем. Они основаны на формальной связи, существующей между уравнением КдВ и задачей о собственных значениях уравнения типа уравнения Шредингера (*C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura*, 1967).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left[\frac{1}{6\beta} a(t, \xi) + \varepsilon\right] \psi = 0 \tag{39,23}$$

и будем снова для определенности считать, что $\beta > 0$. Уравнение (39,23) имеет вид уравнения Шредингера, в котором функция $-a(t, \xi)$ играет роль потенциальной энергии, зависящей от t как от параметра. Пусть функция $a(t, \xi)$ в некоторой области ξ положительна и стремится к нулю при $\xi \to \pm\infty$. Тогда уравнение (39,23) будет обладать собственными значениями ε, отвечающими «финитному движению в потенциальной яме $-a(t, \xi)$»; в силу зависимости функции a от t, эти собственные значения, вообще говоря, тоже зависят от t.

Покажем, что собственные значения ε не будут зависеть от t, если функция $a(t, \xi)$ удовлетворяет уравнению КдВ (39,4).

Выразив из (39,23) a в виде

$$a = -6\beta\left(\frac{\psi''}{\psi} + \varepsilon\right)$$

и подставив в (39,4), после прямого вычисления получим

$$\psi^2 \frac{d\varepsilon}{dt} = (\psi' A - \psi A')', \tag{39,24}$$

где

$$A(t, \xi) = 6\beta\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{3}{\psi}\psi'\psi'' + \psi''' - \frac{\varepsilon}{6}\psi'\right); \tag{39,25}$$

существенно, что правая сторона (39,24) оказывается выраженной в виде производной по ξ от выражения, обращающегося в нуль при $\xi \to \pm\infty$ (напомним, что собственные функции дискретного спектра уравнения (39,23) исчезают на бесконечности). Поэтому интегрирование равенства (39,24) по всем ξ от $-\infty$ до ∞ дает

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^2 d\xi = 0$$

и, ввиду конечности стоящего здесь нормировочного интеграла функции ψ, отсюда следует, что $d\varepsilon/dt = 0$.

Покажем теперь, что уравнение (39,23) имеет всего одно дискретное собственное значение в случае стационарного «потенциала» $a(\xi)$ вида (39,13), отвечающего одиночному солитону. С этим «потенциалом» уравнение (39,23) имеет вид

$$\psi'' + \left(\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha\xi} + \varepsilon\right)\psi = 0, \tag{39,26}$$

причем

$$U_0 = a_1/6\beta; \quad \alpha = (a_1/12\beta)^{1/2}. \tag{39,27}$$

Дискретные собственные значения уравнения (39,26) даются формулой

$$\varepsilon_n = -\alpha^2 (s-n)^2, \qquad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4U_0}{\alpha^2}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем должно быть $n < s$ (см. III, § 23, задача 4). Со значениями параметров из (39,27) $s = 1$, так что имеется всего одно собственное значение

$$\varepsilon = -a_1/12\beta. \tag{39,28}$$

Если же «потенциал» $a(t, \xi)$ представляет собой совокупность солитонов, находящихся на больших расстояниях друг от друга (так что «взаимодействие» между ними отсутствует), то спектр собственных значений уравнения (39,23) будет складываться из «уровней» (39,28) в каждой из потенциальных ям, причем каждый из них определяется амплитудой a_1 соответствующего солитона.

Поскольку скорость распространения солитона растет с увеличением его амплитуды, то солитон большей амплитуды в конце концов всегда догонит солитон меньшей амплитуды. Произвольная начальная совокупность удаленных друг от друга солитонов после процессов взаимных «столкновений» в конце концов превратится в совокупность солитонов, расположенных в порядке возрастания их амплитуд (напомним, что все возмущения, описываемые уравнением КдВ, распространяются в одну сторону!).

Полученные выше результаты позволяют сразу же сделать интересное заключение: начальная и конечная совокупности солитонов одинаковы по общему числу и по амплитудам солитонов, отличаясь лишь порядком их расположения. Это следует непосредственно из того, что каждый из изолированных солитонов соответствует одному из собственных значений ε, а эти значения от времени не зависят.

Вообще, всякое положительное ($a > 0$) начальное возмущение, занимающее конечную область пространства, в ходе своей эволюции, согласно уравнению КдВ, в конце концов распадается в совокупность изолированных солитонов, амплитуды которых уже не зависят от времени. Эти амплитуды и число солитонов можно в принципе найти путем определения спектра дискретных собственных значений уравнения (39,23) с начальным распределением $a(0, \xi)$ в качестве «потенциала». Если же начальное возмущение содержит в себе также и участки с $a < 0$, то в ходе его эволюции возникает еще и волновой пакет, постепенно расплывающийся, не распадаясь на солитоны.

Во избежание недоразумений надо, однако, уточнить, что именно подразумевается под начальным возмущением в уравнении КдВ. Реальное возмущение, возникающее в среде в некоторый момент времени, в ходе своей эволюции (описываемой полным волновым уравнением второго порядка по времени) распадается, вообще говоря, на два возмущения, распространяющиеся в обе стороны оси x. Под «начальным» для уравнения КдВ надо понимать одно из этих двух возмущений сразу после распада.

Задача

Определить коэффициенты α и β в уравнении (39,2) для ионно-звуковых волн в плазме с $T_i \ll T_e$.

Решение. Коэффициент дисперсии β получается из (33,4) разложением по малой величине ka_e:

$$\beta = a_e^2 u_0,$$

где $u_0 = (zT_e/M)^{1/2}$.

При определении же коэффициента нелинейности α можно пренебречь дисперсией вовсе, т. е. рассматривать предельный случай $k \to 0$. В этом пределе плазму можно во всяком случае считать квазинейтральной и соответственно описывать ее гидродинамическими уравнениями изотермического идеального газа (38,3), (38,7). Положив $N_i = N_0 + \delta N$, пишем эти уравнения с точностью до членов второго порядка по малым величинам δN и v. При этом в членах второго порядка можно положить $v = u_0 \delta N / N_0$, как это имеет место в линейном приближении для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x (u_0 — скорость волн в линейном приближении). Тогда уравнения примут вид

$$\frac{\partial\, \delta N}{\partial t} + N_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(v\, \delta N) = -\frac{2u_0}{N_0}\delta N \frac{\partial\, \delta N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_0^2}{N_0}\frac{\partial\, \delta N}{\partial x} = \frac{u_0^2}{N_0^2}\delta N \frac{\partial\, \delta N}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по t, второе по x и исключив $\partial^2 v/\partial t\,\partial x$, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta N=-\frac{2u_0}{N_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta N\frac{\partial \delta N}{\partial x}\right).$$

С той же точностью заменяем производную $\partial/\partial t$ в правой стороне уравнения и в разности $\partial/\partial t-u_0\partial/\partial x$ в его левой стороне на $-u_0\partial/\partial x$. Наконец, вычеркнув с обеих сторон дифференцирования $\partial/\partial x$ и сравнив получившееся уравнение с (39,2), найдем

$$\alpha=u_0/N_0.$$

§ 40. Диэлектрическая проницаемость вырожденной бесстолкновительной плазмы

При вычислении в §§ 29, 31 диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы полностью пренебрегалось всеми квантовыми эффектами. Полученные таким образом результаты ограничены, прежде всего, по температуре условием отсутствия вырождения; для электронов это условие гласит:

$$T\gg\varepsilon_F\sim\hbar^2N_e^{2/3}/m, \tag{40,1}$$

где $\varepsilon_F=p_F^2/2m$, p_F—граничный импульс распределения Ферми при $T=0$, связанный с плотностью числа электронов равенством $p_F^3/3\pi^2\hbar^3=N_e$.

Кроме того, сама возможность применения к плазме во внешнем поле классического уравнения Больцмана связана с определенными условиями, наложенными на волновой вектор $\mathbf{k}$ и частоту ω поля. Характерные расстояния изменения поля ($\sim 1/k$) должны быть велики по сравнению с де-бройлевской длиной волны электронов ($\hbar/\bar{p}$), а связанная с этой неоднородностью неопределенность импульса ($\sim\hbar k$) должна быть мала по сравнению с шириной ($\sim T/\bar{v}$) области размытия теплового распределения электронов. Для невырожденной плазмы $\bar{p}\sim T/\bar{v}\sim(mT)^{1/2}$, так что оба эти условия совпадают. Для вырожденной плазмы $\bar{p}\sim p_F$, $v\sim v_F=p_F/m$, но поскольку $T\ll\varepsilon_F$, то $T/\bar{v}\ll\bar{p}$. Таким образом, достаточно потребовать в обоих случаях

$$\hbar k\bar{v}\ll T. \tag{40,2}$$

Наконец, частота должна удовлетворять условию

$$\hbar\omega\ll\varepsilon_F \tag{40,3}$$

— квант энергии поля должен быть мал по сравнению со средней энергией электрона (это условие, впрочем, обычно не играет роли).

Теперь мы рассмотрим диэлектрические свойства плазмы, отказавшись от выполнения условий (40,1—3) для ее электронной