Дифференцируя первое уравнение по t, второе по x и исключив $\partial^2 v/\partial t\,\partial x$, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta N=-\frac{2u_0}{N_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta N\frac{\partial\delta N}{\partial x}\right).$$

С той же точностью заменяем производную $\partial/\partial t$ в правой стороне уравнения и в разности $\partial/\partial t-u_0\partial/\partial x$ в его левой стороне на $-u_0\partial/\partial x$. Наконец, вычеркнув с обеих сторон дифференцирования $\partial/\partial x$ и сравнив получившееся уравнение с (39,2), найдем

$$\alpha=u_0/N_0.$$

§ 40. Диэлектрическая проницаемость вырожденной бесстолкновительной плазмы

При вычислении в §§ 29, 31 диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы полностью пренебрегалось всеми квантовыми эффектами. Полученные таким образом результаты ограничены, прежде всего, по температуре условием отсутствия вырождения; для электронов это условие гласит:

$$T\gg\varepsilon_F\sim\hbar^2N_e^{2/3}/m, \tag{40,1}$$

где $\varepsilon_F=p_F^2/2m$, p_F—граничный импульс распределения Ферми при $T=0$, связанный с плотностью числа электронов равенством $p_F^3/3\pi^2\hbar^3=N_e$.

Кроме того, сама возможность применения к плазме во внешнем поле классического уравнения Больцмана связана с определенными условиями, наложенными на волновой вектор $\mathbf{k}$ и частоту ω поля. Характерные расстояния изменения поля ($\sim 1/k$) должны быть велики по сравнению с де-бройлевской длиной волны электронов ($\hbar/\bar{p}$), а связанная с этой неоднородностью неопределенность импульса ($\sim\hbar k$) должна быть мала по сравнению с шириной ($\sim T/\bar{v}$) области размытия теплового распределения электронов. Для невырожденной плазмы $\bar{p}\sim T/\bar{v}\sim(mT)^{1/2}$, так что оба эти условия совпадают. Для вырожденной плазмы $\bar{p}\sim p_F$, $v\sim v_F=p_F/m$, но поскольку $T\ll\varepsilon_F$, то $T/\bar{v}\ll\bar{p}$. Таким образом, достаточно потребовать в обоих случаях

$$\hbar k\bar{v}\ll T. \tag{40,2}$$

Наконец, частота должна удовлетворять условию

$$\hbar\omega\ll\varepsilon_F \tag{40,3}$$

—квант энергии поля должен быть мал по сравнению со средней энергией электрона (это условие, впрочем, обычно не играет роли).

Теперь мы рассмотрим диэлектрические свойства плазмы, отказавшись от выполнения условий (40,1—3) для ее электронной компоненты; ионная же компонента может оставаться невырожденной. Мы будем вычислять электронную часть диэлектрической проницаемости. При этом будет по-прежнему предполагаться выполненным условие, обеспечивающее возможность пренебрежения взаимодействием частиц плазмы:

$$e^2 N_e^{1/3} \ll \bar{\varepsilon}; \tag{40,4}$$

при $\bar{\varepsilon} \sim \varepsilon_F$ это условие принимает вид $N_e^{1/3} \gg me^2/\hbar^2$, или $e^2/\hbar v_F \ll 1$ (ср. V, § 80, IX, § 85).

Отказ от условия (40,2) требует применения с самого начала квантовомеханического уравнения для матрицы плотности. Поскольку взаимодействием между электронами пренебрегается, можно писать замкнутое уравнение сразу для одночастичной матрицы плотности $\rho_{\sigma_1\sigma_2}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (σ_1, σ_2 — спиновые индексы). Будем считать распределение электронов независящим от спина; другими словами, зависимость матрицы плотности от спиновых индексов отделяется в виде множителя $\delta_{\sigma_1\sigma_2}$, который мы будем опускать. Независящая от спина матрица плотности $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\hat{H}_1 - \hat{H}_2^*)\,\rho, \tag{40,5}$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан электрона во внешнем поле, а индексы 1 или 2 указывают переменные ($\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_2$), на которые действует оператор (см. III, § 14). Это уравнение заменяет собой классическую теорему Лиувилля ($df/dt = 0$) для классической одночастичной функции распределения.

Будем (как и в § 29) вычислять продольную диэлектрическую проницаемость. Соответственно этому рассматриваем электрическое поле со скалярным потенциалом $\varphi(t, \mathbf{r})$, так что гамильтониан электрона

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - e\varphi(t, \mathbf{r}). \tag{40,6}$$

Считая поле слабым, полагаем

$$\rho = \rho_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \delta\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{40,7}$$

где ρ_0 — матрица плотности невозмущенного стационарного и однородного (но не обязательно равновесного) состояния газа; в силу его однородности, ρ_0 зависит только от разности $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Матрица плотности $\rho_0(\mathbf{R})$ связана с (невозмущенной) функцией распределения электронов по импульсам $n_0(\mathbf{p})$ формулой

$$n_0(\mathbf{p}) = \mathcal{N}_e \int \rho_0(\mathbf{R})\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar}\, d^3x, \tag{40,8}$$

где $\mathcal{N}_e$ — полное число электронов (см. IX, (7,20)). Здесь $n(\mathbf{p})$ определяется как числа заполнения квантовых состояний электронов с определенными значениями импульса и проекции спина. Число состояний, приходящихся на элемент импульсного пространства d^3p и с двумя значениями проекции спина, есть $2d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Поэтому $n(\mathbf{p})$ связано с использовавшейся ранее функцией распределения $f(\mathbf{p})$ соотношением

$$f(\mathbf{p}) = \frac{2n(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{40,9}$$

Подставив (40,7) в (40,8) и отбросив члены второго порядка малости, получим линейное уравнение для малой добавки к матрице плотности:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 - \Delta_2)\right]\delta\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ = -e[\varphi(t, \mathbf{r}_1) - \varphi(t, \mathbf{r}_2)]\rho_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{40,10}$$

Пусть[1])

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}. \tag{40,11}$$

Тогда зависимость решения уравнения (40,10) от суммы $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ (и от времени) можно отделить, положив

$$\delta\rho = \exp\left[i\mathbf{k}\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - i\omega t\right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{40,12}$$

Подставив это выражение в (40,10), получим уравнение для $g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R})$:

$$\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2\right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \\ = -e\varphi_{\omega\mathbf{k}}\left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}/2} - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}/2}\right)\rho_0(\mathbf{R}).$$

Теперь можно перейти в этом уравнении к фурье-разложению по $\mathbf{R}$. Умножив обе его стороны на $\exp(-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar)$ и проинтегрировав по d^3x, получим (с учетом (40,8))

$$\left[\hbar\omega - \varepsilon\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) + \varepsilon\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \\ = -\frac{e\varphi_{\omega\mathbf{k}}}{\mathcal{N}_e}\left[n_0\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) - n_0\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\right]$$

(где $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$), или

$$g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \frac{e\varphi_{\omega\mathbf{k}}}{\hbar\mathcal{N}_e}\frac{n_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - n_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)}{\omega - \mathbf{kv}}. \tag{40,13}$$

---

[1]) Гамильтониан (40,6) должен быть эрмитовым, а потому функция φ в нем (и, следовательно, в уравнении (40,10)) — вещественной. Но после того как уравнение (40,10) написано, ввиду его линейности можно его решать для каждой из комплексных монохроматических компонент поля в отдельности.

Значение матрицы плотности при $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2\equiv\mathbf{r}$ определяет плотность числа частиц в системе: $N=2\mathcal{N}\rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ (см. IX, (7,19)). Поэтому изменение плотности электронов под влиянием поля есть

$$\delta N_e=2\mathcal{N}_e\delta\rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r})=2\mathcal{N}_e e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R}=0),$$

или, выразив $g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R}=0)$ через фурье-компоненты,

$$\delta N_e=2\mathcal{N}_e e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\int g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{40,14}$$

Соответствующее же изменение плотности зарядов есть $-e\delta N_e$.

Диэлектрическая проницаемость вычисляется теперь так, как это было сделано в § 29: исходя из связи плотности заряда с вектором диэлектрической поляризации ($-e\delta N_e=-\operatorname{div}\mathbf{P}=-i\mathbf{kP}$) пишем

$$e\delta N_e=i\frac{\varepsilon_l-1}{4\pi}\mathbf{Ek}=k^2\frac{\varepsilon_l-1}{4\pi}\varphi_{\omega\mathbf{k}}.$$

Таким образом, находим следующую формулу для электронной части продольной диэлектрической проницаемости плазмы с функцией распределения электронов $n(\mathbf{p})$ (индекс 0 у которой теперь опускаем):

$$\varepsilon_l(\omega, k)-1=-\frac{4\pi e^2}{\hbar k^2}\int\frac{n(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}/2)-n(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}/2)}{\mathbf{kv}-\omega-i0}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{40,15}$$

(*Ю. Л. Климонтович*, *В. П. Силин*, 1952); обход полюса в интеграле определяется, как обычно, правилом Ландау.

В квазиклассическом случае, при выполнении условий (40,2—3), можно разложить функции $n(\mathbf{p}\pm\hbar\mathbf{k}/2)$ по степеням $\mathbf{k}$. Тогда

$$n\left(\mathbf{p}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)-n\left(\mathbf{p}-\frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\approx\hbar\mathbf{k}\frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}$$

и формула (40,15) переходит (с учетом связи (40,9)) в прежнюю формулу (29,9). Подчеркнем, однако, что распределение $n(\mathbf{p})$ в этой формуле может относиться к вырожденной плазме.

Применим формулу (40,15) к полностью вырожденной электронной плазме при $T=0$, когда $n(\mathbf{p})=1$ при $p<p_F$ и $n(\mathbf{p})=0$ при $p>p_F$. Заменив в двух членах в (40,15) переменную интегрирования $\mathbf{p}\pm\hbar\mathbf{k}/2\to\mathbf{p}$, получим

$$\varepsilon_l-1=\frac{4\pi e^2}{\hbar k^2}\int\limits_{p<p_F}\left\{\frac{1}{\omega_+-\mathbf{kv}+i0}-\frac{1}{\omega_--\mathbf{kv}+i0}\right\}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\omega_\pm = \omega \pm \hbar k^2/2m$. Элементарное, хотя и довольно громоздкое интегрирование приводит к результату

$$\varepsilon_l(\omega, k) - 1 = \frac{3\Omega_e^2}{2k^2 v_F^2}\{1 - g(\omega_+) + g(\omega_-)\}, \tag{40,16}$$

$$g(\omega) = \frac{m(\omega^2 - k^2 v_F^2)}{2\hbar k^3 v_F} \ln \frac{\omega + k v_F}{\omega - k v_F},$$

причем логарифм должен пониматься как $\ln|u| - i\pi$, если его аргумент $u < 0$; «плазменная частота» Ω_e определена по-прежнему как $\Omega_e = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$.

В квазиклассическом пределе, при $\hbar k \ll p_F$, $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ [1]), формула (40,16) приводит к простому выражению, не содержащему $\hbar$:

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{3\Omega_e^2}{k^2 v_F^2}\left[1 - \frac{\omega}{2kv_F} \ln \frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F}\right] + \begin{cases} 0 & \text{при } |\omega| > kv_F, \\ i3\pi\Omega_e^2\omega/2(kv_F)^3 & \text{при } |\omega| < kv_F. \end{cases} \tag{40,17}$$

Особый интерес представляет статический случай. При $\omega = 0$ выражение (40,16) как функция k имеет особенность в точке, где $\hbar k$ совпадает с диаметром ферми-сферы:

$$\hbar k = 2p_F; \tag{40,18}$$

в этой точке аргумент одного из логарифмов обращается в нуль. Вблизи нее

$$\varepsilon_l(0, k) - 1 = \frac{e^2}{2\pi\hbar\varepsilon_F}\left[1 - \xi \ln \frac{1}{|\xi|}\right], \tag{40,19}$$

$$\xi = (\hbar k - 2p_F)/2p_F, \quad |\xi| \ll 1.$$

Покажем, что наличие этой особенности (ее называют *коновской*) приводит к изменению характера экранировки поля зарядов в плазме, которая становится не экспоненциальной [2]).

Запишем выражение (40,19) в виде

$$\varepsilon_l(0, k) = \beta - \alpha\xi \ln \frac{1}{|\xi|}, \tag{40,20}$$

где $\alpha = e^2/2\pi\hbar v_F$, а постоянная β может включать в себя также и не имеющий особенности вклад от невырожденной ионной компоненты плазмы.

Фурье-компонента поля, создаваемого покоящимся в плазме малым точечным зарядом e_1, выражается через диэлектрическую

---

[1]) При $T = 0$ достаточно этих условий. Дело в том, что предельное значение ε_l при $\hbar k v_F/\varepsilon_F \to 0$ и $T \to 0$ не зависит от порядка перехода к пределу. Поэтому соотношение между $\hbar k v_F$ и T несущественно.

[2]) Физические следствия особенности, возникающей при условии (40,18), были указаны *Коном* (*W. Kohn*, 1959).

проницаемость формулой

$$\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{4\pi e_1}{k^2\varepsilon_l(0, k)} \tag{40,21}$$

(см. задачу 1 § 31). Для потенциала же $\varphi(r)$ как функции расстояния от заряда e_1 имеем

$$\varphi(r)=\int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=\frac{1}{2\pi^2 r}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^\infty \varphi_{\mathbf{k}} e^{ikr}k\,dk. \tag{40,22}$$

При $k\to 0$ функция $\varphi(k)$ стремится к постоянному пределу и не имеет особенности. Поэтому асимптотическое поведение интеграла в (40,22) при $r\to\infty$ определяется особенностью этой функции при $\hbar k=2p_F$. Вблизи нее

$$\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{e_1\pi\hbar^2}{\beta p_F^2}\left[1+\frac{\alpha}{\beta}\xi\ln\frac{1}{|\xi|}\right].$$

Вклад этой области в асимптотическое значение интеграла:

$$\varphi(r)\approx\frac{2e_1\alpha}{\pi\beta^2 r}\,\mathrm{Im}\,(e^{2ip_F r/\hbar}J),\qquad J=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi\ln\frac{1}{|\xi|}e^{2ip_F r\xi/\hbar}d\xi;$$

ввиду быстрой сходимости (см. ниже) интегрирование по ξ можно распространить от $-\infty$ до ∞.

Для вычисления интеграла J разделим его на две части — от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ — и в каждой из них повернем путь интегрирования в плоскости комплексной переменной ξ до его совпадения с верхней мнимой полуосью. Положив затем $\xi=iy$, получим

$$J=\int\limits_0^\infty e^{-2p_F ry/\hbar}\left[\ln\frac{1}{-iy}-\ln\frac{1}{iy}\right]y\,dy.$$

Разность в квадратных скобках сводится к $i\pi$, так что $J=i\pi(\hbar/2p_F r)^2$. Окончательно находим

$$\varphi(r)\approx\frac{e_1\alpha\hbar^2}{2\beta^2 p_F^2}\frac{\cos(2p_F r/\hbar)}{r^3}. \tag{40,23}$$

Таким образом, потенциал экранированного поля вдали от заряда осциллирует с амплитудой, спадающей по степенному закону. Этот результат, полученный для вырожденной плазмы при $T=0$, остается в силе для малых, но конечных температур на расстояниях $r\ll\hbar v_F/T$.

Задача

Определить спектр электронных колебаний вырожденной плазмы при $T=0$ в квазиклассической области значений k.

Решение. Зависимость $\omega(k)$ дается уравнением $\varepsilon_l(\omega, k)=0$ с ε_l из (40,17). При малых k ($kv_F \ll \Omega_e$) оказывается, что $kv_F/\omega \ll 1$; действительно, разложив $\varepsilon_l(\omega, k)$ по степеням этого отношения, получим

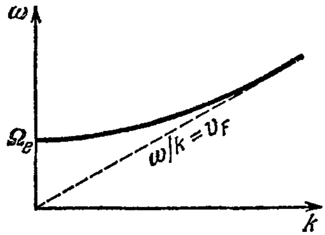

Рис. 12.

$$\omega=\Omega_e\left[1+\frac{3}{10}\left(\frac{kv_F}{\Omega_e}\right)^2\right] \tag{1}$$

(*А. А. Власов*, 1938)[1]) Эта часть спектра соответствует обычным плазменным колебаниям (ср. (32,5)).

При больших k ($kv_F \gg \Omega_e$, но по-прежнему $\hbar k \ll p_F$) оказывается, что $\omega \approx kv_F$. Решая уравнение $\varepsilon_l=0$ последовательными приближениями, получим

$$\omega=kv_F\left[1+2\exp\left(-\frac{2k^2v_F^2}{3\Omega_e^2}-2\right)\right] \tag{2}$$

(*И. И. Гольдман*, 1947). Эта часть спектра аналогична нулевому звуку в незаряженном ферми-газе (ср. IX, (4,16)).

Ход спектра показан схематически на рис. 12. Отметим, что везде $\omega/k > v_F$, а поскольку при $T=0$ нет частиц со скоростями $v > v_F$, то затухание Ландау строго равно нулю.

---

[1]) Отметим, что условие квазиклассичности частоты Ω_e в вырожденной плазме ($\hbar\Omega_e \ll \varepsilon_F$) совпадает с условием идеальности плазмы (40,4).