СТОЛКНОВЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

§ 41. Интеграл столкновений Ландау

Изучение свойств плазмы с учетом столкновений между частицами надо начать с вывода кинетического уравнения для функций распределения электронов и ионов.

Специфика этого случая связана с медленностью убывания сил кулоновского взаимодействия между заряженными частицами. При буквальном применении больцмановского интеграла столкновений это обстоятельство приводит к появлению расходимостей в интегралах на больших расстояниях между сталкивающимися частицами. Это значит, что существенную роль играют именно далекие столкновения. Но на больших расстояниях частицы отклоняются лишь с малым изменением их импульсов. Это обстоятельство позволяет придать интегралу столкновений вид, подобный тому, какой он имеет в уравнении Фоккера—Планка. В отличие от последнего, однако, интеграл столкновений теперь не линеен по искомым функциям распределения. Но относительная малость изменений импульса при столкновениях во всяком случае означает, что описываемый интегралом столкновений процесс можно рассматривать как диффузию в импульсном пространстве. Соответственно этому интеграл столкновений может быть представлен в виде

$$\mathrm{St}\, f = -\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} \equiv -\frac{\partial s_\alpha}{\partial p_\alpha},$$

где $\mathbf{s}$—плотность потока частиц в импульсном пространстве; задача состоит в выражении этого потока через функции распределения.

Запишем в виде

$$w f(\mathbf{p}) f'(\mathbf{p}')\, d^3q\, d^3p'$$

число столкновений, испытываемых (в 1 с) частицей с импульсом $\mathbf{p}$, с частицами с импульсами $\mathbf{p}'$ в интервале d^3p', причем $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ переходят соответственно в $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}'-\mathbf{q}$; здесь учтено уже сохранение импульса при столкновениях. Аргументы t, $\mathbf{r}$ в функциях распределения для краткости не выписываем. Частицы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ могут относиться к одному и тому же или к различным родам частиц в плазме (электроны, ионы). Функцию w будем считать выраженной через полусуммы импульсов каждой из частиц до и после столкновений и через передаваемый импульс $\mathbf{q}$:

$$w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\ \mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\ \mathbf{q}\right);$$

она зависит, конечно, и от родов сталкивающихся частиц. В силу принципа детального равновесия (2,8), функция w симметрична по отношению к перестановке начальных и конечных частиц:

$$w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\mathbf{q}\right)=w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\ -\mathbf{q}\right). \qquad (41,1)$$

Функция w содержит δ-функционный множитель, выражающий сохранение энергии при столкновениях (сохранение импульса уже учтено).

Рассмотрим единичную площадку, расположенную в некоторой точке $\mathbf{p}$ импульсного пространства (частиц данного рода), перпендикулярную оси p_α. По определению, компонента s_α плотности потока есть избыток числа частиц (данного сорта), пересекающих в единицу времени эту площадку слева направо, над числом частиц, пересекающих ее справа налево. Перемещение в импульсном пространстве есть результат столкновений. Если при столкновении частице передается α-компонента импульса q_α ($q_\alpha>0$), то в результате таких столкновений через площадку пройдут слева направо те частицы, у которых до столкновения эта компонента лежала в пределах от $p_\alpha-q_\alpha$ до p_α. Поэтому полное число частиц, пересекающих площадку слева направо, есть

$$\sum\int\limits_{q_\alpha>0} d^3q\int d^3p'\int\limits_{p_\alpha-q_\alpha}^{p_\alpha} w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\mathbf{q}\right)f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')\,dp_\alpha.$$

Суммирование производится по всем сортам частиц, к которым относятся штрихованные величины (в том числе, конечно, и по заданному сорту, к которому относятся величины без штрихов). Аналогичным образом, число частиц, пересекающих ту же площадку справа налево, можно представить в виде

$$\sum\int\limits_{q_\alpha>0} d^3q\int d^3p'\int\limits_{p_\alpha-q_\alpha}^{p_\alpha} w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\ \mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\ -\mathbf{q}\right)f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,dp_\alpha.$$

В силу (41,1), функции w в обоих интегралах одинаковы. Поэтому разность этих интегралов содержит в подынтегральном выражении разность

$$f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')-f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q}').$$

Воспользуемся теперь малостью передачи импульса **q** (точнее, малостью существенных в интегралах значений q по сравнению с **p** и **p′**). Разлагая написанную разность по степеням **q**, получим, с точностью до членов первого порядка,

$$\left[-\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_\beta} f'(\mathbf{p}')+f(\mathbf{p})\frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_\beta}\right] q_\beta .$$

После этого можно уже, с той же точностью, заменить в подинтегральных выражениях

$$w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\ \mathbf{q}\right) \approx w(\mathbf{p}, \mathbf{p}';\ \mathbf{q}).$$

Интегрирование же по dp_α, которое производится по малому интервалу между $p_\alpha - q_\alpha$ и p_α, можно заменить просто умножением на величину этого интервала q_α. В результате получим

$$s_\alpha = \sum \int\limits_{q_\alpha>0} d^3q \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}';\ \mathbf{q}) \left[f(\mathbf{p})\frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_\beta} - f'(\mathbf{p}')\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\right] q_\alpha q_\beta d^3p'. \tag{41,2}$$

В силу (41,1), $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}';\ \mathbf{q})$ — четная функция **q**, поэтому четно и все подынтегральное выражение в (41,2). Это позволяет заменить интеграл по полупространству $q_\alpha > 0$ половиной интеграла по всему **q**-пространству.

Переписывая выражение (41,2), введем также в него вместо функции w сечение столкновений согласно

$$w\, d^3q = |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\, d\sigma.$$

Как уже было объяснено в связи с записью интеграла столкновений в виде (3,9), после этого можно считать, что число независимых интегрирований уже уменьшено учетом закона сохранения энергии. Таким образом, плотность потока импульса в импульсном пространстве для частиц каждого рода принимает вид

$$s_\alpha = \sum \int \left[f(\mathbf{p})\frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_\beta} - f'(\mathbf{p}')\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\right] B_{\alpha\beta} d^3p', \tag{41,3}$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int q_\alpha q_\beta |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\, d\sigma. \tag{41,4}$$

Остается вычислить величины $B_{\alpha\beta}$ для столкновений частиц, взаимодействующих по закону Кулона.

При отклонении на малый угол изменение **q** импульса сталкивающихся частиц перпендикулярно их относительной скорости $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$. Поэтому и тензор $B_{\alpha\beta}$ поперечен по отношению к вектору $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$:

$$B_{\alpha\beta}(v_\beta - v'_\beta) = 0. \tag{41,5}$$

Сразу же отметим, что тем самым автоматически обеспечивается обращение потоков (41,3) в нуль для равновесного распределения всех частиц. С максвелловскими распределениями f и f' (с одинаковой температурой T) подынтегральное выражение в (41,3) становится равным

$$\frac{ff'}{T}(v'_\beta - v_\beta) B_{\alpha\beta} = 0.$$

Вектор $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$ есть в то же время единственный вектор, от которого может зависеть тензор $B_{\alpha\beta}$. Поперечный по отношению к $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$ такой тензор должен иметь вид

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} B \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}\right],$$

где скаляр

$$B = B_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\int q^2 |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\, d\sigma.$$

Пусть χ — угол отклонения относительной скорости (угол отклонения в системе центра инерции двух частиц). При малых значениях этого угла величина изменения импульса $q \approx \mu|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\chi$, где μ — приведенная масса частиц. Поэтому

$$B = \frac{1}{2}\mu^2 |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^3 \int \chi^2\, d\sigma = \mu^2 |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^3 \sigma_t,$$

где

$$\sigma_t = \int (1-\cos\chi)\, d\sigma \approx \frac{1}{2}\int \chi^2\, d\sigma$$

— транспортное сечение. Дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в кулоновском поле дается формулой Резерфорда

$$d\sigma \approx \frac{4(ee')^2\, do}{\mu^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^4 \chi^4} \approx \frac{8\pi(ee')^2}{\mu^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^4}\frac{d\chi}{\chi^3} \tag{41,6}$$

(e, e' — заряды сталкивающихся частиц). Отсюда транспортное сечение

$$\sigma_t = \frac{4\pi(ee')^2}{\mu^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^4} L, \qquad L = \int \frac{d\chi}{\chi}. \tag{41,7}$$

Для величин же $B_{\alpha\beta}$ имеем, следовательно,

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2\pi(ee')^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|} L \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha(v_\beta) - v'_\beta)}{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}\right]. \tag{41,8}$$

Интеграл L логарифмически расходится. Расходимость на нижнем пределе связана с физической причиной — медленностью убывания кулоновских сил, приводящей к большой вероятности рассеяния на малые углы. В действительности, однако, в электрически нейтральной плазме кулоновское поле частицы на достаточно больших расстояниях экранируется другими зарядами; обозначим через $\chi_{\min}$ порядок величины минимальных углов, на которых рассеяние еще можно считать кулоновским. Расходимость же на верхнем пределе связана просто с тем, что все формулы были написаны в предположении малости углов и теряют свою применимость при $\chi\sim 1$. Имея в виду слабую чувствительность логарифма большого аргумента по отношению к небольшим изменениям последнего, можно выбрать пределы интегрирования по оценкам их порядков величины, т. е. написать

$$L=\ln(1/\chi_{\min}). \qquad (41,9)$$

Эту величину называют *кулоновским логарифмом*. Сразу подчеркнем, что такой способ его определения ограничивает все рассмотрение, как говорят, *логарифмической точностью*: пренебрегается величинами, малыми по сравнению не только с большой величиной $1/\chi_{\min}$, но и с ее логарифмом.

Фактическая оценка $\chi_{\min}$ зависит от того, должно ли рассеяние частиц описываться классически или квантовомеханически (само же по себе выражение (41,8) справедливо в обоих случаях, поскольку чисто кулоновское рассеяние описывается формулой Резерфорда как в классической, так и в квантовой механике[1])).

Экранировка кулоновского поля частицы в плазме происходит на расстояниях порядка величины дебаевского радиуса a. В классическом случае $\chi_{\min}$ определяется как угол рассеяния при пролете на прицельном расстоянии $\sim a$. Соответствующее изменение импульса: $q\sim|ee'|/a\bar{v}_{\text{отн}}$ (произведение силы $\sim|ee'|/a^2$ на время пролета $\sim a/\bar{v}_{\text{отн}}$)[2]). Разделив его на импульс $\sim\mu\bar{v}_{\text{отн}}$, получим $\chi_{\min}\sim|ee'|/a\mu\bar{v}_{\text{отн}}^2$. Условие классичности рассеяния дается неравенством $|ee'|/\hbar\bar{v}_{\text{отн}}\gg 1$ (см. III, § 127). Таким образом, имеем

$$L=\ln\frac{a\mu\bar{v}_{\text{отн}}^2}{|ee'|}\quad\text{при}\quad\frac{|ee'|}{\hbar\bar{v}_{\text{отн}}}\gg 1. \qquad (41,10)$$

---

[1]) В квантовом случае при рассеянии одинаковых частиц (электронов) должен учитываться обменный эффект. Этот эффект, однако, не меняет предельного вида сечения на малых углах (41,6).

[2]) Здесь и везде в аналогичных местах ниже $\bar{v}_{\text{отн}}$ — среднее значение относительной скорости двух частиц, $|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|$. Если частицы одного рода, то $\bar{v}_{\text{отн}}$ совпадает со средним значением $\bar{v}$. Если частицы различного рода, то $\bar{v}_{\text{отн}}$ совпадает с бо́льшим из $\bar{v}$ и $\bar{v}'$.

В обратном предельном случае, когда $|ee'|/\hbar\bar{v}_{\text{отн}} \ll 1$, рассеяние должно рассматриваться квантовомеханически, в борновском приближении. Сечение рассеяния в этом случае выражается через фурье-компоненту рассеивающего потенциала с волновым вектором $\mathbf{q}/\hbar$. Вклад в эту компоненту, происходящий от экранирующего «облака» зарядов (с размерами $\sim a$), становится малым при $qa/\hbar \gtrsim 1$; именно это есть в данном случае условие чистой кулоновости рассеяния. Поэтому угол $\chi_{\min}$ находится из условия

$$q_{\min} a/\hbar \sim \mu\bar{v}\chi_{\min} a/\hbar \sim 1.$$

Таким образом, в этом случае

$$L = \ln \frac{\mu a \bar{v}_{\text{отн}}}{\hbar} \quad \text{при} \quad \frac{|ee'|}{\hbar \bar{v}_{\text{отн}}} \ll 1. \tag{41,11}$$

При $|ee'| \sim \hbar\bar{v}_{\text{отн}}$ оба выражения (41,10) и (41,11), естественно, совпадают.

Выпишем теперь окончательное выражение для плотностей потоков в импульсном пространстве, подставив (41,8) в (41,3):

$$s_\alpha = \sum 2\pi (ee')^2 L \int \left(f \frac{\partial f'}{\partial p'_\beta} - f' \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right) \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2 \delta_{\alpha\beta} - (v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^3} d^3p'. \tag{41,12}$$

Соответствующие кинетические уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} \tag{41,13}$$

(e—заряд частиц, к которым относится функция f, т. е. для электронов надо писать $-e$, а для ионов ze). Интеграл столкновений в логарифмическом приближении для газа с кулоновским взаимодействием между частицами был установлен *Л. Д. Ландау* (1936).

Применимость интеграла столкновений Ландау связана с выполнением определенных условий. Характерные длины $1/k$, на которых существенно меняется функция распределения, должны быть велики по сравнению с радиусом экранирования a, а характерные интервалы времени $1/\omega$—велики по сравнению с $a/\bar{v}_{\text{отн}}$; в логарифмическом приближении, однако, фактически достаточно потребовать выполнения этих условий в слабой форме

$$ka < 1, \quad \omega < \bar{v}_{\text{отн}}/a \tag{41,14}$$

со знаком $<$ вместо $\ll$. Дебаевский радиус a играет здесь ту же роль, которую для нейтральных газов играл радиус действия молекулярных сил.

Задача

В § 34 показано, что после того, как возмущения электронной плотности с волновым вектором k затухнут из-за затухания Ландау, возмущения функции распределения продолжают осциллировать по закону $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}$ (34,16). Найти закон затухания этих осцилляций из-за кулоновских столкновений при временах $t \gg 1/k\bar{v}$.

Решение. Ищем функцию распределения в виде

$$f = f_0 + \delta f, \qquad \delta f = a(t, \mathbf{v})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \tag{1}$$

где δf — возмущение равновесного распределения f_0; a — медленно меняющаяся функция скорости (испытывает заметное изменение лишь на интервалах $\sim \bar{v} \gg 1/kt$). При подстановке (1) в (41,12) в подынтегральном выражении надо сохранить лишь член

$$-f_0(\mathbf{p}')\frac{\partial \delta f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \approx \frac{i}{m}\mathbf{k}t\delta f(\mathbf{p})\, f_0(\mathbf{p}');$$

остальные члены дают малый вклад либо ввиду погашения интеграла, благодаря наличию быстро осциллирующего множителя $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}'t)$, либо ввиду отсутствия в них множителя $kt \gg 1/\bar{v}$. По последней причине надо и при вычислении $\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s}$ дифференцировать только экспоненциальный множитель. В результате кинетическое уравнение дает

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -k_\alpha k_\beta b_{\alpha\beta} t^2 a,$$

причем по порядку величины коэффициенты $b_{\alpha\beta} \sim \bar{v}^2 \nu$ (ν — частота столкновений). Отсюда

$$a(t, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{v}) \exp\left\{-\frac{1}{3}k_\alpha k_\beta b_{\alpha\beta} t^3\right\}, \tag{2}$$

поэтому время затухания колебаний

$$\tau_{\text{зат}} \sim \nu^{-1/3}(k\bar{v})^{-2/3}.$$

Поскольку вся теория затухания Ландау имеет смысл лишь при условии $k\bar{v} \gg \nu$, то $\tau_{\text{зат}} \ll 1/\nu$. Результат (2) справедлив лишь при условии малости показателя в (2) по сравнению с показателем kvt в (1); для этого должно быть $t \ll (\nu k\bar{v})^{-1/2}$. За это время осцилляции затухнут в $\exp\left(-\sqrt{k\bar{v}/\nu}\right)$ раз.

§ 42. Передача энергии между электронами и ионами

Большая разница между массами электронов m и ионов M затрудняет обмен энергией между ними: при столкновении тяжелой и легкой частиц энергия каждой из них почти не меняется. Поэтому установление равновесия между электронами самими по себе и ионами самими по себе происходит значительно быстрее, чем между электронами и ионами. В результате легко возникает ситуация, в которой электронная и ионная компоненты плазмы имеют каждая свое максвелловское распределение с различными температурами T_e и T_i (обычно T_e превосходит T_i).