Задача

В § 34 показано, что после того, как возмущения электронной плотности с волновым вектором $\mathbf{k}$ затухнут из-за затухания Ландау, возмущения функции распределения продолжают осциллировать по закону $e^{-i\mathbf{kv}t}$ (34,16). Найти закон затухания этих осцилляций из-за кулоновских столкновений при временах $t \gg 1/k\bar{v}$.

Решение. Ищем функцию распределения в виде

$$f = f_0 + \delta f, \qquad \delta f = a(t, \mathbf{v})\, e^{-i\mathbf{kv}t + i\mathbf{kr}}, \tag{1}$$

где δf — возмущение равновесного распределения f_0; a — медленно меняющаяся функция скорости (испытывает заметное изменение лишь на интервалах $\sim \bar{v} \gg 1/kt$). При подстановке (1) в (41,12) в подынтегральном выражении надо сохранить лишь член

$$-f_0(\mathbf{p}')\frac{\partial \delta f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \approx \frac{i}{m}\mathbf{k}t\,\delta f(\mathbf{p})\, f_0(\mathbf{p}');$$

остальные члены дают малый вклад либо ввиду погашения интеграла, благодаря наличию быстро осциллирующего множителя $\exp(-i\mathbf{kv}'t)$, либо ввиду отсутствия в них множителя $kt \gg 1/\bar{v}$. По последней причине надо и при вычислении $\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s}$ дифференцировать только экспоненциальный множитель. В результате кинетическое уравнение дает

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -k_\alpha k_\beta b_{\alpha\beta} t^2 a,$$

причем по порядку величины коэффициенты $b_{\alpha\beta} \sim \bar{v}^2\nu$ (ν — частота столкновений). Отсюда

$$a(t, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{v}) \exp\left\{-\frac{1}{3}k_\alpha k_\beta b_{\alpha\beta} t^3\right\}, \tag{2}$$

поэтому время затухания колебаний

$$\tau_{\text{зат}} \sim \nu^{-1/3}(k\bar{v})^{-2/3}.$$

Поскольку вся теория затухания Ландау имеет смысл лишь при условии $k\bar{v} \gg \nu$, то $\tau_{\text{зат}} \ll 1/\nu$. Результат (2) справедлив лишь при условии малости показателя в (2) по сравнению с показателем kvt в (1); для этого должно быть $t \ll (\nu k\bar{v})^{-1/2}$. За это время осцилляции затухнут в $\exp\left(-\sqrt{k\bar{v}/\nu}\right)$ раз.

§ 42. Передача энергии между электронами и ионами

Большая разница между массами электронов m и ионов M затрудняет обмен энергией между ними: при столкновении тяжелой и легкой частиц энергия каждой из них почти не меняется. Поэтому установление равновесия между электронами самими по себе и ионами самими по себе происходит значительно быстрее, чем между электронами и ионами. В результате легко возникает ситуация, в которой электронная и ионная компоненты плазмы имеют каждая свое максвелловское распределение с различными температурами T_e и T_i (обычно T_e превосходит T_i).

Разность температур электронов и ионов приводит к передаче энергии между обеими компонентами плазмы; определим эту передачу (*Л. Д. Ландау*, 1936).

Будем временно обозначать величины, относящиеся к ионам и электронам, буквами соответственно без штриха и со штрихом. Изменение энергии ионов (в 1 с в см^3 плазмы) дается интегралом

$$\frac{dE}{dt}=\int \varepsilon \,\mathrm{St}\, f\, d^3p=-\int \varepsilon \,\mathrm{div}_{\mathbf{p}}\mathbf{s}\, d^3p,$$

или, интегрируя по частям,

$$\frac{dE}{dt}=\int \mathbf{s}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}d^3p=\int \mathbf{s}\mathbf{v}\, d^3p \tag{42,1}$$

(интеграл по бесконечно удаленной поверхности в импульсном пространстве, как обычно, обращается в нуль).

В суммах (41,3), определяющих потоки электронов и ионов в импульсном пространстве, остаются лишь члены, соответствующие электрон-ионным столкновениям; электрон-электронные и ион-ионные члены для максвелловских распределений обращаются в нуль. Подставив в эти остающиеся члены максвелловские распределения с температурами T' и T, получим для потока ионов:

$$s_\alpha=\int ff'\left(\frac{v_\beta}{T}-\frac{v'_\beta}{T'}\right)B_{\alpha\beta}\, d^3p'.$$

Но в силу (41,5) имеем $B_{\alpha\beta}v'_\beta=B_{\alpha\beta}v_\beta$; сделав эту замену и подставив поток $\mathbf{s}$ в (42,1), найдем

$$\frac{dE}{dt}=\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)\int ff'\, v_\alpha v_\beta B_{\alpha\beta}\, d^3p\, d^3p'. \tag{42,2}$$

Ввиду малости массы электронов, их скорости в среднем велики по сравнению со скоростями ионов. Поэтому в $B_{\alpha\beta}$ можно положить $v'_\alpha-v_\alpha\approx v'_\alpha$. После этого величины $B_{\alpha\beta}$ уже не будут зависеть от v_α и в (42,2) можно произвести интегрирование по d^3p:

$$\int fv_\alpha v_\beta\, d^3p=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}N\overline{v^2}=\delta_{\alpha\beta}N\frac{T}{M}.$$

Таким образом,

$$\frac{dE}{dt}=\frac{NT}{M}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)\int f'B\, d^3p'. \tag{42,3}$$

Наконец, подставив сюда согласно (41,8) $B=4\pi e^4z^2L/v'$ (ze — заряд ионов) и заметив, что для максвелловского распределения

$$\int f'\frac{d^3p'}{v'}=N'\sqrt{\frac{2m}{\pi T'}},$$

получим

$$\frac{dE}{dt}=\frac{4NN'z^2e^4\sqrt{2\pi m}L}{MT'^{3/2}}(T'-T). \qquad (42,4)$$

Это же выражение с обратным знаком дает убыль энергии электронной компоненты плазмы, $-dE'/dt$. Выразив энергию электронов в единице объема через их температуру согласно $E'=3N'T'/2$ и вернувшись к обозначению электронных и ионных величин индексами e и i, напишем окончательно следующее выражение для скорости изменения электронной температуры:

$$\frac{dT_e}{dt}=-\frac{T_e-T_i}{\tau_{ei}^{\varepsilon}}, \qquad \tau_{ei}^{\varepsilon}=\frac{T_e^{3/2}M}{8N_iz^2e^4L_e(2\pi m)^{1/2}}. \qquad (42,5)$$

Фигурирующий здесь кулоновский логарифм равен

$$L_e=\begin{cases}\ln(aT_e/ze^2) & \text{при } ze^2/\hbar v_{Te}\gg 1,\\ \ln(\sqrt{mT_e}a/\hbar) & \text{при } ze^2/\hbar v_{Te}\ll 1.\end{cases} \qquad (42,6)$$

Величина τ_{ei}^{ε} представляет собой время релаксации для установления электрон-ионного равновесия.

§ 43. Длина пробега частиц в плазме

Мы видели из изложенного в § 41 вывода, что характеристикой столкновений в кинетическом уравнении служит транспортное сечение σ_t (41,7). Поэтому именно это сечение должно фигурировать и в определении длины свободного пробега.

Для электрон-электронных (ee) и электрон-ионных (ei) столкновений приведенная масса $\mu\sim m$, а поскольку скорости электронов много больше скоростей ионов, то

$$\mu(\mathbf{v}_e-\mathbf{v}_i)^2\sim mv_{Te}^2\sim T_e.$$

Для длины пробега электронов получается поэтому оценка

$$l_e\sim T_e^2/4\pi e^4NL_e \qquad (43,1)$$

с L_e из (42,6). Множители z в оценках не пишем; предполагается, что $z_i\sim 1$. Время свободного пробега электронов τ_e (или обратная ей величина — частота столкновений ν_e):

$$\tau_e\sim\frac{1}{\nu_e}\sim\frac{l_e}{v_{Te}}\sim\frac{T_e^{3/2}m^{1/2}}{4\pi e^4NL_e}. \qquad (43,2)$$

Отметим, что

$$\frac{l_e}{a_e}\sim\frac{1}{L_e}\left(\frac{T_e}{N^{1/3}e^2}\right)^{3/2}$$