Коэффициент теплопроводности оценивается аналогичным образом с помощью газокинетической формулы (7,10); основную роль играют электроны. Имеем $\varkappa \sim N_e l_e v_{Te} c_e$ (где $c_e \sim 1$ — электронная теплоемкость), откуда

$$\varkappa \sim T_e^{5/2}/e^4 m^{1/2} L_e. \qquad (43,9)$$

В противоположность электро- и теплопроводности, вязкость плазмы связана в основном с движением ионов, поскольку именно в ионной компоненте плазмы в основном сосредоточен ее импульс. Сверх того, импульс иона мало меняется при столкновениях с электронами; по этой причине достаточно рассматривать одни лишь *ii*-столкновения. Согласно (8,11), коэффициент вязкости оценивается как $\eta \sim N_i M l_i v_{Ti}$, откуда

$$\eta \sim M^{1/2} T_i^{5/2}/e^4 L_i. \qquad (43,10)$$

Вычисление коэффициентов в выражениях (43,8—10) требует решения линеаризованного кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау, что возможно лишь приближенными численными методами. Так, для водородной плазмы ($z = 1$) коэффициенты в выражениях для σ, $\varkappa$, η оказываются равными соответственно 0,6; 0,9; 0,4.

§ 44. Лоренцева плазма

При вычислении электронного вклада в кинетические коэффициенты плазмы надо, вообще говоря, учитывать как *ei*-, так и *ee*-столкновения. Если, однако, заряд ионов достаточно велик, роль *ei*-столкновений может оказаться преобладающей. Действительно, сечение *ee*-столкновений пропорционально $(e^2)^2$, а частота таких столкновений ν_{ee} — еще и плотности электронов N_e; аналогичным образом, частота *ei*-столкновений пропорциональна $(ze^2)^2 N_i = e^4 z_i N_e$, так что при $z \gg 1$ будет и $\nu_{ei} \gg \nu_{ee}$. Плазму, в которой можно пренебречь *ee*- по сравнению с *ei*-столкновениями, называют *лоренцевой*. Хотя этот случай и не очень реалистичен, он интересен как в методическом отношении, так и по возможным применениям к другим объектам[1]).

Ввиду малости скоростей ионов по сравнению со скоростями электронов, в первом приближении можно ими пренебречь, т. е. считать ионы неподвижными, а их распределение заданным. В задаче о поведении плазмы во внешнем электрическом поле имеется выделенное направление — направление поля **E**. Если электронная функция распределения мало отличается от равно-

[1]) Например, к слабо ионизованному газу, где вместо *ei*-столкновений надо говорить о столкновениях электронов с нейтральными атомами.

весной, $f=f_0(p)+\delta f$, то малая поправка δf линейна по полю, т. е. имеет вид $\delta f=\mathbf{p}\mathbf{E}g(p)$. В этих условиях электрон-ионный интеграл столкновений принимает тот вид, который был придан в § 11 интегралу столкновений в задаче о диффузии примеси легкого газа в тяжелом:

$$\mathrm{St}\, f=-\nu_{ei}(v)\,\delta f, \tag{44,1}$$

где введена зависящая от скорости *эффективная частота* столкновений

$$\nu_{ei}(v)=N_i v\sigma_t^{(ei)}, \tag{44,2}$$

а $\sigma_t^{(ei)}$—транспортное сечение рассеяния электронов на ионах. Взяв последнее из (41,7) и заменив $zN_i=N_e$, получим

$$\nu_{ei}(v)=\frac{4\pi z e^4 N_e L}{m^2 v^3}. \tag{44,3}$$

Ниже в этом параграфе мы будем писать просто $\nu(v)$, опуская индексы ei.

Вычислим диэлектрическую проницаемость лоренцевой плазмы в пространственно-однородном (волновой вектор $\mathbf{k}=0$) переменном ($\sim e^{-i\omega t}$) электрическом поле. Добавка δf к равновесному распределению будет зависеть от времени по тому же закону, и кинетическое уравнение для нее имеет вид

$$-i\omega\delta f-e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}+\nu(v)\,\delta f=0. \tag{44,4}$$

Заметив также, что $\partial f_0/\partial\mathbf{p}=-\mathbf{v}f_0/T$, находим отсюда

$$\delta f=-\frac{e}{T}\mathbf{E}\mathbf{v}\frac{f_0}{\nu(v)-i\omega}. \tag{44,5}$$

Диэлектрическая проницаемость определяется соотношением (29,4): $-i\omega\mathbf{P}=\mathbf{j}$, или

$$-i\omega\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E}=-e\int\mathbf{v}\,\delta f\,d^3p. \tag{44,6}$$

Подставив (44,5) и произведя усреднение по направлениям $\mathbf{v}$ (согласно $\langle v_\alpha v_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}v^2/3$), получим

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2}{3\omega T}\int\frac{v^2 f_0\,d^3p}{\omega+i\nu(v)}. \tag{44,7}$$

В предельном случае $\omega\gg\nu$[1]) эта формула дает

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2}+i\,\frac{4\pi e^2 N_e}{3\omega^3 T}\langle v^2\nu(v)\rangle, \tag{44,8}$$

[1]) Под ν (без указания аргумента) подразумевается значение $\nu(v)$ при $v=v_T$. В данном случае $\nu=4\pi z e^4 N_e L/m^{1/2}T_e^{3/2}$.

где усреднение производится по максвелловскому распределению электронов. Вычислив это среднее для $\nu(v)$ из (44,3), получим

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}+i\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4LN_e}{T^{3/2}m^{1/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3}\qquad(\omega\gg\nu).\qquad(44,9)$$

Напомним, однако, что область справедливости этой формулы ограничена также и сверху общим условием (41,14) применимости логарифмического приближения в интеграле столкновений: $\omega\ll v_{Te}/a_e=\Omega_e$ — частота должна быть мала по сравнению с плазменной частотой электронов [1]).

Формула (44,9) имеет особое значение, так как она справедлива при любых (а не только больших) значениях z. Действительно, при $\omega\gg\nu$ роль столкновений сводится к малым поправкам; ei- и ee-столкновения можно, следовательно, учитывать независимо. Но в отсутствие ионов однородное электрическое поле приводило бы лишь к перемещению всей системы электронов как целого и столкновения в такой системе не могут вызвать диссипацию (выражающуюся мнимой частью проницаемости ε''); последняя обуславливается в этих условиях только ei-столкновениями, учтенными в (44,9).

В обратном предельном случае, когда $\omega\ll\nu$, проницаемость имеет вид

$$\varepsilon=i\frac{4\pi\sigma}{\omega},\qquad\sigma=\frac{e^2N_e}{3T}\left\langle\frac{v^2}{\nu(v)}\right\rangle.\qquad(44,10)$$

Величина σ, фигурирующая в этом предельном выражении, есть статическая проводимость плазмы (см. VIII, § 58). Вычисление с $\nu(v)$ из (44,3) дает для нее

$$\sigma=\frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\frac{T^{3/2}}{ze^2Lm^{1/2}}.\qquad(44,11)$$

Этот результат можно было бы получить, конечно, и путем прямого вычисления плотности электрического тока

$$\mathbf{j}=-e\int\mathbf{v}\,\delta f\,d^3p$$

с δf из (44,5) (при $\omega=0$).

Вычислим также и другие кинетические коэффициенты лоренцевой плазмы, связанные с ее поведением под влиянием постоянного ($\omega=0$) электрического поля и градиента температуры. Предварительно напомним определение этих коэффициентов (см. VIII, § 25).

Условия теплового равновесия требуют, как известно, наряду с постоянством температуры также и постоянства вдоль среды

[1]) Вычисление ε'' при $\omega\gg\Omega_e$ рассмотрено в § 48.

суммы $\mu+U$, где μ — химический потенциал частиц, а U — их энергия во внешнем поле. В данном случае речь идет о равновесии по отношению к электронам, так что под μ надо понимать их химический потенциал, а $U=-e\varphi$, где φ — потенциал электрического поля. Соответственно этому электрический ток $\mathbf{j}$ и диссипативный поток энергии $\mathbf{q}'$ обращаются одновременно в нуль лишь при условиях $T=\mathrm{const}$, $\mu-e\varphi=\mathrm{const}$, т. е. при $\nabla T=0$, $\nabla\mu+e\mathbf{E}=0$. Выражения для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}'$ записываются в виде следующих соотношений, удовлетворяющих указанному условию:

$$\mathbf{E}+\frac{1}{e}\nabla\mu=\frac{1}{\sigma}\mathbf{j}+\alpha\nabla T, \tag{44,12}$$

$$\mathbf{q}'=\mathbf{q}-\left(\varphi-\frac{\mu}{e}\right)\mathbf{j}=\alpha T\mathbf{j}-\varkappa\nabla T. \tag{44,13}$$

Здесь σ — электрическая проводимость среды, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, α — термоэлектрический коэффициент; соотношение между коэффициентами при ∇T в (44,12) и $\mathbf{j}$ в (44,13) — следствие принципа Онсагера. Величина $(\varphi-\mu/e)\,\mathbf{j}$, вычтенная из полного потока энергии, представляет собой плотность конвективного потока энергии[1]).

Для вычисления кинетических коэффициентов исходим из кинетического уравнения

$$-e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}+\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}}=-\nu(v)\,\delta f. \tag{44,14}$$

Подставив в него равновесное распределение в виде[2])

$$f_0=\exp\left(\frac{\mu-\varepsilon}{T}\right), \tag{44,15}$$

получим

$$\delta f=-\frac{f_0}{T\nu(v)}(e\mathbf{E}+\nabla\mu)\,\mathbf{v}+f_0\frac{\mu-\varepsilon}{T^2\nu(v)}\mathbf{v}\nabla T. \tag{44,16}$$

Термоэлектрический коэффициент вычисляется по коэффициенту в равенстве $\mathbf{j}=-\alpha\sigma\nabla T$ при $\mathbf{E}+\nabla\mu/e=0$. Пишем

$$\mathbf{j}=-e\int\mathbf{v}\delta f\,d^3p=-\frac{e}{T^2}\int f_0\frac{\mu-\varepsilon}{\nu(v)}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\nabla T)\,d^3p$$

---

[1]) При записи соотношений (44,12—13) в VIII, § 25, было произведено переобозначение: под φ и $\mathbf{E}$ подразумевались $\varphi-\mu/e$ и $\mathbf{E}+\nabla\mu/e$. Такое определение, допустимое при феноменологическом подходе, нецелесообразно в кинетической теории, где под $-e\mathbf{E}$ надо понимать действующую на электрон силу.

[2]) Обозначение диэлектрической проницаемости и энергии электрона $mv^2/2$ одной и той же буквой ε вряд ли может привести к недоразумениям.

и после усреднения по направлениям $\mathbf{v}$ находим

$$\alpha=\frac{N_e e}{3\sigma T^2}\left\langle\frac{v^2(\mu-\varepsilon)}{\nu(v)}\right\rangle=\frac{1}{eT}\left\{\mu-\frac{\langle v^2\varepsilon/\nu(v)\rangle}{\langle v^2/\nu(v)\rangle}\right\}. \tag{44,17}$$

Вычисление с $\nu(v)$ из (44,3) дает[1])

$$\alpha=\frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T}-4\right). \tag{44,18}$$

Для вычисления коэффициента теплопроводности замечаем, что при $\mathbf{j}=0$ должно быть $\mathbf{E}+\nabla\mu/e=\alpha\nabla T$. Подставив это значение (вместе с α из (44,18)) в (44,16), имеем

$$\delta f=\frac{f}{T\nu(v)}\left(4-\frac{\varepsilon}{T}\right)\mathbf{v}\nabla T.$$

Вычисляя с этой функцией поток энергии

$$\mathbf{q}=\int\mathbf{v}\varepsilon\delta f\,d^3p,$$

получим

$$\varkappa=\frac{N_e}{3T^2}\left\langle\frac{v^2\varepsilon(4T-\varepsilon)}{\nu(v)}\right\rangle \tag{44,19}$$

и, наконец,

$$\varkappa=\frac{16\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\frac{T^{5/2}}{ze^4Lm^{1/2}}. \tag{44,20}$$

Задача

Найти столкновительную часть затухания электронных плазменных волн.

Решение. Если мнимая часть диэлектрической проницаемости мала, то вклады в нее за счет затухания Ландау и за счет столкновений складываются. С учетом последнего ε дается формулой (44,9); приравняв ε нулю, найдем $\omega=\Omega_e-i\gamma$, где коэффициент затухания

$$\gamma=\frac{\nu_{ei}}{3\sqrt{2\pi}}=\frac{2\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4LN_e}{m^{1/2}T_e^{3/2}}.$$

Отношение

$$\frac{\gamma}{\Omega_e}=\frac{\sqrt{2}zL}{3}\left(\frac{e^2N_e^{1/3}}{T_e}\right)^{3/2}\ll 1$$

в силу условия разреженности плазмы; этим оправдывается применение (44,9).

---

[1]) В классической статистике химический потенциал содержит член вида ζT с неопределенной постоянной ζ (соответствующей неопределенной аддитивной постоянной в энтропии). Тем самым возникает и неопределенная постоянная ζ/e в α. Эта неопределенность не отражается, однако, на каких-либо наблюдаемых эффектах; неопределенные члены $(\zeta/e)\nabla T$ сокращаются с обеих сторон равенства (44,12).