§ 45. Убегающие электроны

Быстрое убывание кулоновского сечения с увеличением скорости сталкивающихся частиц приводит, как мы увидим, к тому, что уже в сколь угодно слабом электрическом поле функция распределения достаточно быстрых электронов в плазме оказывается сильно искаженной.

Двигаясь с тепловой скоростью v, за время своего свободного пробега электрон в электрическом поле E приобретает упорядоченную скорость

$$V \sim \frac{eEl}{mv} \sim \frac{eE}{mvN_e\sigma_t(v)} \sim \frac{v^3mE}{4\pi e^3LN_e}$$

(сечение σ_t из (41,7)). Уже при $v \sim v_c$, где

$$v_c = \left(\frac{4\pi N_e e^3 L}{mE}\right)^{1/2}, \tag{45,1}$$

становится $V \sim v$, а при $v > v_c$ длина и время пробега определяются уже скоростью V. Импульс, приобретаемый электроном за время пробега, будет при этом

$$\frac{eEl}{V} \sim \frac{eE}{VN_e\sigma_t(V)} \sim \frac{V^3m^2E}{4\pi e^3LN_e} \sim mV\left(\frac{V}{v_c}\right)^2.$$

Импульс же, отдаваемый электроном при столкновении в конце пробега, $\sim mV$. Отсюда видно, что электроны с достаточно большими скоростями будут неограниченно ускоряться; такие электроны называют *убегающими*. При условии $v_c \gg (T_e/m)^{1/2}$ это явление будет наблюдаться лишь в «хвосте» максвелловского распределения; электрическое поле должно для этого удовлетворять условию

$$E \ll E_c = 4\pi e^3LN_e/T_e. \tag{45,2}$$

В этих условиях задачу об убегающих электронах можно решать как стационарную. Основная масса электронов, распределенных по Максвеллу, играет роль большого резервуара, из которого «течет» стационарный малый поток в сторону больших энергий[1]).

Уже из происхождения убегающих электронов как результата направленного ускорения их электрическим полем очевидно, что они движутся в основном под малыми углами θ к направлению поля. Если, однако, поставить себе целью вычисление лишь величины потока убегающих электронов, полное определение функции их распределения не требуется; достаточно определить усредненное по углам распределение $\bar{f}$ по энергиям.

---

[1]) Явление убегающих электронов было указано *Дрейсером* (*H. Dreicer*, 1958), а излагаемая здесь количественная теория дана *А. В. Гуревичем* (1960).

Кинетическое уравнение для распределения электронов по импульсам в электрическом поле имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}-e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}+\operatorname{div}_{\mathbf{p}}\mathbf{s}=0, \tag{45,3}$$

где $\mathbf{s}$ — плотность столкновительного потока в импульсном пространстве. В сферических координатах p, θ, φ в импульсном пространстве (с полярной осью вдоль силы $-e\mathbf{E}$) имеем

$$-e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=eE\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\sin\theta}{p}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)=$$
$$=eE\left(\frac{\cos\theta}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2f-\frac{1}{p\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta\cdot f\right).$$

Дивергенция же потока

$$\operatorname{div}_{\mathbf{p}}\mathbf{s}=\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2s_p+\frac{1}{p\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\cdot s_\theta.$$

Усредним уравнение (45,3) по углам, т. е. умножим его на $2\pi\sin\theta\,d\theta/4\pi$ и проинтегрируем. Все члены с производными $\partial/\partial\theta$ при этом выпадают; множитель же $\cos\theta$ можно, в первом приближении, заменить единицей. В результате для усредненной функции $\bar f$ получим уравнение

$$\frac{\partial\bar f}{\partial t}+\frac{eE}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2\bar f+\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2\bar s_p=0. \tag{45,4}$$

В нем остается лишь радиальная компонента плотности потока в импульсном пространстве. Эта компонента связана с передачей энергии при столкновениях; вклад ei-столкновений в нее, очевидно, мал по сравнению с вкладом ee-столкновений.

Поскольку убегающие электроны составляют лишь очень малую долю всех электронов, при вычислении потока s_p надо учитывать их столкновения лишь с основной массой максвелловских электронов (а не друг с другом); скорости последних малы по сравнению со скоростями убегающих электронов. В этих условиях нет необходимости заново вычислять поток s_p. Для него можно написать выражение

$$s_p=-T_e\nu_{ee}(v)\,m\left[\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{p}{mT_e}f\right] \tag{45,5}$$

непосредственно по аналогии с ранее выведенной формулой (22,5); здесь $\nu_{ee}(v)=4\pi e^4N_eL/m^2v^3$ — частота кулоновских столкновений быстрых электронов с медленными (ср. (44,3))[1]. Поскольку

[1] При выводе формулы (22,5) были использованы только малость передачи энергии при столкновениях и малость скорости частицы-мишени по сравнению со скоростью налетающего электрона. Для перехода к данному случаю достаточно заменить в (22.5) M на m, а под длиной пробега l понимать длину пробега по отношению к ee-столкновениям.

выражение (45,5) относится к электронам со скоростями $v \sim v_c$, то и для кулоновского логарифма полагаем

$$L = \ln(mv_c^2 a/e^2). \tag{45,6}$$

Величина

$$\bar{S}_p = \bar{s}_p + eE\bar{f} \tag{45,7}$$

представляет собой, как это ясно из вида уравнения (45,4), полную (от столкновений и от действия поля) плотность радиального потока в импульсном пространстве. Согласно сказанному выше, распределение убегающих электронов можно искать как стационарное, т. е. пренебрегая производной по времени в кинетическом уравнении (45,4). Тогда

$$4\pi p^2 \bar{S}_p = \text{const} \equiv n_{\text{уб}}. \tag{45,8}$$

Это равенство (с $\bar{s}_p$ из (45,5)) представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее функцию распределения $\bar{f}$. Постоянная же $n_{\text{уб}}$ дает искомую величину—полное число убегающих (в единицу времени в единице объема) электронов.

Введем безразмерную переменную u и безразмерную постоянную b согласно определению

$$u = p/p_c, \quad b = E/E_c, \quad p_c = (mT_e/b)^{1/2}. \tag{45,9}$$

Тогда уравнение (45,8) принимает вид

$$-\frac{b}{u}\frac{d\bar{f}}{du} - (1-u^2)\bar{f} = C \tag{45,10}$$

(постоянная C отличается от $n_{\text{уб}}$ постоянным множителем). Поскольку предполагается, что поле $E \ll E_c$, то параметр $b \ll 1$; эта величина играет в рассматриваемой задаче роль малого параметра, характеризующего степень приближения[1]).

Решение уравнения (45,10):

$$\bar{f} = F - CF\int_0^u \frac{u}{F}\,du, \tag{45,11}$$

где

$$F = \frac{N_e}{(2\pi mT_e)^{3/2}} \exp\left\{\frac{1}{2b}\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)\right\} \tag{45,12}$$

—решение однородного уравнения. Нормировочный множитель в F определен из условия, чтобы при $u \to 0$ функция $\bar{f}$ перехо-

[1]) В частности, анализ угловой части кинетического уравнения показывает, что направления движения убегающих электронов лежат в области углов $\theta \sim b^{1/4}$.

дила в максвелловское распределение

$$f_0 = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2b}\right).$$

При $u \to \infty$ функция F неограниченно возрастает, между тем как $\bar{f}(u)$ должна оставаться конечной. Отсюда получаем условие $\bar{f}/F \to 0$ при $u \to \infty$, из которого определяется постоянная C[1]:

$$C = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \left[\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2b}\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)\right\} u\,du\right]^{-1}. \tag{45,13}$$

Интеграл вычисляется методом перевала путем разложения показателя экспоненты вблизи точки его максимума, $u = 1$. Таким образом, получается следующий закон зависимости числа убегающих электронов от напряженности поля E:

$$n_{\text{уб}} \sim N_e \nu_{ee}(v_{Te}) \exp\left(-\frac{E_c}{4E}\right). \tag{45,14}$$

Предэкспоненциальный множитель написан здесь лишь по размерности; более точное вычисление лежит вне рассмотренного приближения и требует решения кинетического уравнения с самого начала с большей точностью.

§ 46. Сходящийся интеграл столкновений

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау позволяет решать задачи физики плазмы лишь с логарифмической точностью: большой аргумент кулоновского логарифма не вполне определен. Эта неопределенность связана с расходимостью интегралов на больших и малых углах рассеяния. Как уже указывалось, расходимость на больших углах не имеет принципиального характера: она появляется лишь в результате произведенного при выводе разложения по степеням передаваемого импульса $\mathbf{q}$; в самом интеграле столкновений Больцмана эта расходимость отсутствует. Расходимость же на малых углах возникает в результате неучета экранирующего действия плазмы на взаимное рассеяние частиц в ней. Для вычисления интеграла столкновений с более высокой, чем логарифмическая, точностью необходимо последовательно учитывать экранирование с самого начала (а не только при определении области интегрирования в кулоновском логарифме).

[1]) Формулировка граничных условий здесь аналогична формулировке в § 24.