дила в максвелловское распределение

$$f_0 = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2b}\right).$$

При $u \to \infty$ функция F неограниченно возрастает, между тем как $\bar{f}(u)$ должна оставаться конечной. Отсюда получаем условие $\bar{f}/F \to 0$ при $u \to \infty$, из которого определяется постоянная C[1]):

$$C = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \left[\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2b}\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)\right\} u\, du\right]^{-1}. \qquad (45,13)$$

Интеграл вычисляется методом перевала путем разложения показателя экспоненты вблизи точки его максимума, $u = 1$. Таким образом, получается следующий закон зависимости числа убегающих электронов от напряженности поля E:

$$n_{\text{уб}} \sim N_e \nu_{ee}(v_{Te}) \exp\left(-\frac{E_c}{4E}\right). \qquad (45,14)$$

Предэкспоненциальный множитель написан здесь лишь по размерности; более точное вычисление лежит вне рассмотренного приближения и требует решения кинетического уравнения с самого начала с большей точностью.

§ 46. Сходящийся интеграл столкновений

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау позволяет решать задачи физики плазмы лишь с логарифмической точностью: большой аргумент кулоновского логарифма не вполне определен. Эта неопределенность связана с расходимостью интегралов на больших и малых углах рассеяния. Как уже указывалось, расходимость на больших углах не имеет принципиального характера: она появляется лишь в результате произведенного при выводе разложения по степеням передаваемого импульса **q**; в самом интеграле столкновений Больцмана эта расходимость отсутствует. Расходимость же на малых углах возникает в результате неучета экранирующего действия плазмы на взаимное рассеяние частиц в ней. Для вычисления интеграла столкновений с более высокой, чем логарифмическая, точностью необходимо последовательно учитывать экранирование с самого начала (а не только при определении области интегрирования в кулоновском логарифме).

---

[1]) Формулировка граничных условий здесь аналогична формулировке в § 24.

В § 41 было уже указано, что условия применимости интеграла столкновений с экранированным взаимодействием между заряженными частицами требуют, чтобы функции распределения мало менялись за времена $\sim a/\bar{v}_{\text{отн}}$ и на расстояниях $\sim a$. Эти же условия позволяют рассматривать экранировку зарядов макроскопическим образом как результат диэлектрической поляризации плазмы.

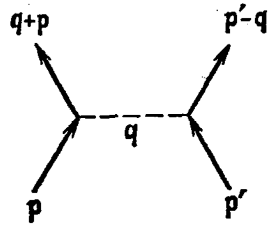
Мы рассмотрим поставленную задачу в двух предельных случаях: 1) когда к столкновениям частиц применимо квантовомеханическое борновское приближение и 2) когда процесс столкновения квазиклассичен.

Борновский случай

Начнем с первого случая, имеющего место при условии

$$|ee'|/\hbar\bar{v}_{\text{отн}} \ll 1. \tag{46,1}$$

Влияние, оказываемое диэлектрической средой на рассеяние частиц, наиболее ясным образом формулируется на языке диаграммной техники. В борновском приближении рассеяние двух частиц описывается (в нерелятивистском случае) диаграммой[1])



(46.2)

где пунктирной линии отвечает функция $4\pi/\mathbf{q}^2$ — компонента Фурье кулоновского потенциала единичного заряда ($\mathbf{q}$ — передаваемый при рассеянии импульс). Наличие среды сказывается лишь в замене этой функции на компоненту потенциала в среде $4\pi/q_\alpha q_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}$, где $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}/\hbar)$ — тензор диэлектрической проницаемости среды, причем $\hbar\omega$ совпадает с передаваемой энергией (ср. IX, § 85). Соответственно и в амплитуде рассеяния появится дополнительный множитель $q^2/q_\alpha q_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}$, а в сечении — квадрат его модуля. Таким образом,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{рез}} \frac{q^4}{|\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta|^2}. \tag{46,3}$$

Для простоты мы будем предполагать далее плазму изотропной. Для такой плазмы тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ сводится к двум скалярам

---

[1]) Как и в § 41, буквы без штриха и со штрихом относятся к двум сталкивающимся частицам (одного и того же или разных сортов).

(ε_t и ε_l), причем в произведение

$$\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \varepsilon_l q^2$$

входит только один из них; мы будем опускать индекс l, подразумевая под ε продольную проницаемость.

Таким образом, сечение рассеяния принимает вид

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{\text{рез}}}{|\varepsilon(\omega, q/\hbar)|^2}, \tag{46,4}$$

где $d\sigma_{\text{рез}}$ — обычное резерфордовское сечение для рассеяния в пустоте[1]). Отметим также, что передаваемая при столкновении энергия связана с передачей импульса равенством

$$\hbar\omega = \mathbf{qV}, \tag{46,5}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость центра инерции сталкивающихся частиц[2]). Величина же вектора $\mathbf{q}$ связана с углом рассеяния χ в системе центра инерции обычной формулой

$$q = 2\mu\,|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\sin\frac{\chi}{2}, \tag{46,6}$$

где $\mu = mm'/(m+m')$.

Интеграл столкновений, автоматически правильно учитывающий большие и малые углы рассеяния и свободный от расходимости, получается подстановкой (46,4) в обычный больцмановский интеграл:

$$\operatorname{St} f = \sum \int \{f(\mathbf{p}+\mathbf{q}) f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) f'(\mathbf{p}')\} \frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\,d\sigma_{\text{рез}}}{|\varepsilon(\omega, q/\hbar)|^2}; \tag{46,7}$$

суммирование производится по всем родам частиц, к которым относятся штрихованные величины.

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений (46,7) очень сложно — не только в силу невозможности разложения подынтегрального выражения по степеням $\mathbf{q}$, но и ввиду того, что диэлектрическая проницаемость плазмы сама определяется через искомые функции распределения. Существенное упрощение достигается лишь в случае слабого отклонения от равновесия, когда допустима линеаризация кинетического уравнения. Тогда проницаемость должна вычисляться с равновесными функциями распределения и, таким образом, не зависит от искомых поправочных функций.

---

[1]) Для рассеяния тождественных частиц (на не малые углы) под $d\sigma_{\text{рез}}$ следует понимать сечение кулоновского рассеяния с учетом обменных эффектов (см. III, § 137).

[2]) В этом легко убедиться, выразив скорости частиц $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ через $\mathbf{V}$ и скорость относительного движения $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$ и учтя, что при рассеянии V и $|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|$ не меняются.

Квазиклассический случай

Перейдем к обратному предельному случаю, когда

$$|ee'|/\hbar \bar{v}_{\text{отн}} \gg 1 \tag{46,8}$$

и для рассеяния частиц применимо квазиклассическое приближение. В этом случае нельзя учесть влияние среды на рассеяние единым образом при малых и больших углах рассеяния (как это было возможным в борновском случае); поэтому придется рассмотреть эти две области отдельно и затем «сшить» результаты при промежуточных углах.

Поле заряда e, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ в диэлектрической среде, определяется уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

В компонентах Фурье находим отсюда для потенциала поля[1]):

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon(\mathbf{kv}, k)} e^{-i\mathbf{kv}t}. \tag{46,9}$$

При малых углах рассеяния изменение импульса частицы дается (см. I, § 20) классической формулой

$$\mathbf{q} = -\int \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} dt, \tag{46,10}$$

где U — энергия взаимодействия двух частиц, а интегрирование производится вдоль прямолинейной траектории $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}'t$ ($\boldsymbol{\rho}$ — вектор прицельного расстояния)[2]). Выразив энергию $U = e'\varphi$ в виде интеграла Фурье

$$U = 4\pi e e' \int \frac{e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}}{k^2 \varepsilon(\omega, k)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tag{46,11}$$

(причем $\omega = \mathbf{kv}$) и подставив в (46,10), получим

$$\mathbf{q} = -4\pi i e e' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}}{k^2 \varepsilon(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')t} dt \right\}.$$

---

[1]) Вывод формулы (46,9) предполагает линейность связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ и тем самым достаточную малость поля. Это условие во всяком случае выполняется (в слабо неидеальном газе) на расстояниях $r \gg a$, от которых как раз и происходит расходимость интеграла, для устранения которой мы имеем в виду воспользоваться формулой (46,9). Этим расстояниям отвечают значения $k \lesssim 1/a$, для которых диэлектрическая проницаемость существенно отличается от 1.

[2]) Безразлично, как вычислять величину $\mathbf{q}$: как изменение импульса каждой из сталкивающихся частиц, или как изменение импульса их относительного движения.

Внутренний интеграл дает $2\pi\delta(k_{\parallel})/|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|$, где $k_{\parallel}$ — проекция вектора $\mathbf{k}$ на направление $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$. Устранив затем δ-функцию интегрированием до $dk_{\parallel}$, найдем

$$\mathbf{q}=-\frac{4\pi iee'}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int\frac{\mathbf{k}_{\perp}\,e^{i\mathbf{k}_{\perp}\boldsymbol{\rho}}}{k_{\perp}^{2}\varepsilon(\omega,\,k_{\perp})}\frac{d^{2}k_{\perp}}{(2\pi)^{2}},\tag{46,12}$$

где $\mathbf{k}_{\perp}$ (как и $\boldsymbol{\rho}$) — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$. При этом и частота

$$\omega=\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{v}=\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{V}.\tag{46,13}$$

Ниже в этом параграфе мы будем опускать индекс $\perp$, подразумевая везде под $\mathbf{k}$ указанный двумерный вектор.

Вычислим теперь с помощью (46,12) величины

$$B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\int q_{\alpha}q_{\beta}\,|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\,d^{2}\rho,\tag{46,14}$$

входящие в интеграл столкновений, разложенный по степеням малого $\mathbf{q}$ (сечение $d\sigma$ в (41,4) написано здесь в виде прицельной площади $d^2\rho$). Написав произведение двух интегралов (46,12) в виде двойного интеграла (по $d^2k\,d^2k'$), выполняем интегрирование по $d^2\rho$ согласно

$$\int e^{i\boldsymbol{\rho}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}\,d^{2}\rho=(2\pi)^{2}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}').$$

После этого интегрирование по d^2k' просто устраняет δ-функцию и остается

$$B_{\alpha\beta}=\frac{2e^{2}e'^{2}}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int\frac{k_{\alpha}k_{\beta}\,d^{2}k}{k^{4}\,|\varepsilon(\mathbf{kV},\,k)|^{2}}\tag{46,15}$$

(здесь использовано также, что согласно (28,9) $\varepsilon(-\omega,\,k)=\varepsilon^{*}(\omega,\,k)$). Эти интегралы уже сходятся при малых k (поскольку $|\varepsilon|^{-2}\rightarrow0$ при $\omega,\ k\rightarrow0$) [1]).

В (46,15) входит проницаемость при отличной от нуля частоте $\omega=\mathbf{kV}$; имея в виду это обстоятельство, иногда говорят, что эта формула учитывает эффект *динамического экранирования*.

Обратим внимание на зависимость подынтегрального выражения в (46,15) от направления $\mathbf{V}$ через аргумент $\mathbf{kV}$ функции ε. Эта зависимость исчезает при вычислении интеграла в логарифмическом приближении, когда интегрирование ограничивается областью от $k\sim1/a$ до $k\sim\mu\overline{v^{2}}/|ee'|$. Основную роль в интеграле

---

[1]) Устранение расходимости в интеграле столкновений Ландау, связанной с экранировкой кулоновского поля, принадлежит *Балеску* и *Ленарду* (*R. Balescu*, 1960; *A. Lenard*, 1960). Полностью сходящееся выражение (46,7) было написано *А. А. Рухадзе* и *В. П. Силиным* (1961).

играют значения k, далекие от обоих этих пределов; в этой области значений имеем $|\varepsilon|^2=1$ и интеграл сводится к $\int k_\alpha k_\beta\, d^2k/k^4$. Усредняя подынтегральное выражение по всем направлениям $\mathbf{k}$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$, мы вернемся к прежнему выражению (41,8) с $L=\int dk/k$.

Для устранения расходимости при больших передачах импульса надо, как уже указывалось, произвести «сшивку» разложенного по степеням $\mathbf{q}$ интеграла столкновений с неразложенным интегралом (*J. Hubbard*, 1961; *O. Aono*, 1962).

Рассмотрим разность

$$\mathrm{St}_{\text{кл}} f-\mathrm{St}_{\text{Б}} f, \tag{46,16}$$

где $\mathrm{St}_{\text{кл}}$ есть искомый сходящийся интеграл столкновений, а $\mathrm{St}_{\text{Б}}$ дается выражением (46,7), которое в борновском случае представляет собой правильный интеграл столкновений, но здесь играет лишь вспомогательную роль.

Разделим весь интервал изменения угла рассеяния на две области:

$$\text{I)}\ \chi<\chi_1,\quad \text{II)}\ \chi>\chi_1,$$

причем χ_1 выбрано так, что

$$|ee'|/\mu\overline{v_{\text{отн}}^2}\ll\chi_1\ll 1. \tag{46,17}$$

При классическом рассеянии на малые углы в кулоновском поле, угол рассеяния χ связан с прицельным расстоянием ρ соотношением

$$\rho=2\,|ee'|/\mu\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2\,\chi.$$

Поэтому значению $\chi=\chi_1$ отвечает (при условии (46,17)) значение $\rho=\rho_1\ll a$, так что на этом расстоянии экранировка несущественна и рассеяние действительно можно считать чисто кулоновским. То же самое относится и ко всей области $\rho<\rho_1$ (т. е. $\chi>\chi_1$). Сечение рассеяния в этой области будет, следовательно, резерфордовским, и соответствующий вклад в интеграл столкновений есть

$$\mathrm{St}_{\text{кл}}^{\text{II}} f=\sum\int_{\chi>\chi_1}[f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q})-f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')]\,|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\,d\sigma_{\text{рез}}.$$

Но точно таков же вклад области $\chi>\chi_1$ в интеграл (46,7): в этой области $q>q_1$, причем в силу условия (46,8)

$$\frac{q_1}{\hbar}\sim\frac{\mu\overline{v}_{\text{отн}}\chi_1}{\hbar}\gg\frac{|ee'|}{\hbar\overline{v}_{\text{отн}}a}\gg\frac{1}{a},$$

и потому в (46,7) можно положить $|\varepsilon|^2=1$. Таким образом, вклад в разность (46,16) возникает только от области $\chi<\chi_1$ ($\rho>\rho_1$), которую и остается рассмотреть.

Во всей этой области передача импульса мала, так что интеграл столкновений можно разлагать по степеням $\mathbf{q}$. Входящие в разложенный $\mathrm{St}_{\text{кл}}$ величины $B_{\alpha\beta}$ вычисляются как интегралы (46,14) с $\mathbf{q}$ из (46,12). Вклад в эти интегралы от области $\rho>\rho_1$ равен

$$(B_{\alpha\beta})^{\mathrm{I}}_{\text{кл}}=\frac{(ee')^2}{2\pi^2|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}F_{\alpha\beta},$$
$$F_{\alpha\beta}=\int\limits_{\rho_1}^{\infty}d^2\rho\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{ik_\alpha\,e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}}{k^2\varepsilon}\,d^2k\int\limits_0^{\infty}\frac{ik_\beta\,e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}}{k^2\varepsilon}\,d^2k\right), \qquad (46,18)$$

где в качестве пределов в двойных интегралах (по $d^2\rho$ и d^2k) условно указаны пределы по ρ и k. Перепишем величины $F_{\alpha\beta}$ тождественным образом в виде

$$F_{\alpha\beta}=\int\limits_0^{\infty}d^2\rho\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}\ldots d^2k\right)_\alpha\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}\ldots d^2k\right)_\beta-$$
$$-\int\limits_0^{\rho_1}d^2\rho\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}\ldots d^2k\right)_\alpha\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}\ldots d^2k\right)_\beta d^2k+$$
$$+\int\limits_{\rho_1}^{\infty}d^2\rho\left(\int\limits_0^{\infty}\ldots d^2k\right)_\alpha\left(\int\limits_{q_1/\hbar}^{\infty}\ldots d^2k\right)_\beta+$$
$$+\int\limits_{\rho_1}^{\infty}d^2\rho\left(\int\limits_{q_1/\hbar}^{\infty}\ldots d^2k\right)_\alpha\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}\ldots d^2k\right)_\beta. \qquad (46,19)$$

Первый член в (46,19), будучи преобразован как при выводе (46,15), дает в (46,18) вклад

$$\frac{2\,(ee')^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int\limits_0^{q_1/\hbar}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^4|\varepsilon|^2}\,d^2k.$$

Это выражение как раз совпадает с тем, которое получилось бы при разложении интеграла (46,7), взятого по области $\chi<\chi_1$ [1]; в интересующую нас разность (46,16) оно, следовательно, не дает вклада.

---

[1]) Резерфордовское сечение рассеяния на малые углы, выраженное через $\mathbf{q}$, имеет вид

$$d\sigma_{\text{рез}}=\frac{4\,(ee')^2}{q^4|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^2}\,d^2q$$

(использовано, что $q\approx\mu|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\chi$, $do\approx d^2q/\mu^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2$).

Для преобразования остальных членов в (46,19) замечаем, что в их подынтегральных выражениях можно положить $\varepsilon=1$: интегралы остаются при этом сходящимися, и их значения определяются областью $k\sim q_1/\hbar$, в которой $ka\gg 1$ и потому $|\varepsilon|\approx 1$. Существенно также, что в силу условия (46,8) параметр

$$q_1\rho_1/\hbar=2|ee'|/\hbar v_{\text{отн}}\gg 1; \tag{46,20}$$

поэтому надо сохранить только члены, остающиеся конечными при $q_1\rho_1/\hbar\to\infty$. В этом пределе третий и четвертый члены в (46,19) обращаются в нуль. Таким образом, остается лишь

$$(B_{\alpha\beta})^{\mathrm{I}}_{\text{кл}}-(B_{\alpha\beta})^{\mathrm{I}}_{\text{Б}}=$$
$$=-\frac{(ee')^2}{2\pi^2|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int\limits_0^{\rho_1}d^2\rho\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}ik_\alpha e^{i\mathbf{k}\rho}\frac{d^2k}{k^2}\int\limits_0^{q_1/\hbar}ik_\beta e^{i\mathbf{k}\rho}\frac{d^2k}{k^2}\right), \tag{46,21}$$

где индексы «кл» и «Б» указывают, что значения $B_{\alpha\beta}$ относятся соответственно к разложениям интегралов $\mathrm{St}_{\text{кл}}$ и $\mathrm{St}_{\text{Б}}$.

Каждый из двух интегралов по d^2k направлен вдоль вектора $\boldsymbol{\rho}$; после интегрирования по этим направлениям (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$) получим для разности (46,21) взятое с обратным знаком выражение вида (41,8) с

$$L=\int\limits_0^{\rho_1}\rho\,d\rho\left[\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{q_1/\hbar}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi e^{ik\rho\cos\varphi}\,d\varphi\,dk\right]^2.$$

Воспользовавшись известным интегральным представлением функций Бесселя и равенством $J_0'(x)=-J_1(x)$, переписываем этот интеграл в виде

$$L=\int\limits_0^{\rho_1}\rho\,d\rho\left[\int\limits_0^{q_1/\hbar}J_1(k\rho)\,dk\right]^2=\int\limits_0^{\rho_1q_1/\hbar}[J_0(x)-1]^2\frac{dx}{x},$$

или, после интегрирования по частям,

$$L=\ln\frac{q_1\rho_1}{\hbar}+2\int\limits_0^{\infty}J_1(x)[J_0(x)-1]\ln x\,dx.$$

Здесь учтено, что параметр $\rho_1q_1/\hbar$ (уже не содержащий вспомогательной величины χ_1) велик; соответственно этому заменен бесконечностью верхний предел в оставшемся интеграле, а в первом члене положено $J_0(q_1\rho_1/\hbar)\approx 0$. С помощью значений

$$\int_0^\infty J_1(x)\ln x\,dx = -C+\ln 2,$$

$$\int_0^\infty J_0(x)\,J_1(x)\ln x\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2 - C)$$

(где $C=0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера; $\gamma=e^C=1{,}78\ldots$) и с учетом (46,20) окончательно найдем

$$L=\ln\frac{\gamma\,|ee'|}{\hbar\,|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}. \qquad (46{,}22)$$

Подводя итог произведенным вычислениям, приходим к результату, что в квазиклассическом случае лишенный расходимостей интеграл столкновений может быть представлен в виде

$$\mathrm{St}_{\text{кл}}f=\mathrm{St}_{\text{Б}}f-\mathrm{St}_{\text{Л}}f, \qquad (46{,}23)$$

где $\mathrm{St}_{\text{Б}}$ дается формулой (46,7), а $\mathrm{St}_{\text{Л}}$ — интеграл столкновений Ландау с кулоновским логарифмом (46,22). Подчеркнем, что в последнем $|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|$ — точная переменная величина, а не среднее значение $v_{\text{отн}}$.

В силу сделанных при выводе пренебрежений, этот результат справедлив, конечно, лишь с «улучшенной логарифмической точностью»: кинетическое уравнение с интегралом столкновений (46,23) позволяет улучшить точность вычислений лишь в смысле определения точного коэффициента в аргументе большого логарифма (с этой точностью, разумеется, из всех ответов выпадает $\hbar$, играющее в (46,23) лишь роль вспомогательного параметра).

Задачи

1. В борновском случае с улучшенной логарифмической точностью вычислить мнимую часть диэлектрической проницаемости однозарядной ($z=1$) равновесной ($T_i=T_e$) плазмы для частот $\omega\gg\nu_{ei}$.

Решение. При вычислении ε'' при условии $\omega\gg\nu$ надо учитывать только ei-столкновения (как это было объяснено в связи с выводом (44,8)). Поскольку интеграл столкновений (46,7) отличается от обычного интеграла Больцмана только множителем $|\varepsilon|^{-2}$ перед $d\sigma_{\text{рез}}$, искомое ε'' может вычисляться по той же формуле (44,8):

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{4\pi e^2 N_i N_e}{3T\omega^3}\langle v_e^3\langle\sigma_t\rangle_i\rangle_e, \qquad (1)$$

где $\langle\ldots\rangle_e$ или $\langle\ldots\rangle_i$ означают усреднение по равновесному распределению скоростей электронов $\mathbf{v}_e$ или ионов $\mathbf{v}_i$. Отличие от произведенных в § 44 вычислений будет состоять лишь в том, что σ_t определяется теперь как

$$\sigma_t=\int(1-\cos\chi)\left|\varepsilon\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{v}_i}{\hbar},\ \frac{q}{\hbar}\right)\right|^{-2}d\sigma_{\text{рез}}, \qquad (2)$$

и в необходимости усреднения σ_t по скоростям ионов (которыми в этом месте пренебречь, конечно, нельзя); в аргументе $\omega = \mathbf{qV}/\hbar$ функции ε скорость центра инерции электрона и иона приближенно заменена скоростью иона. Резерфордовское сечение записываем в виде

$$d\sigma_{\text{рез}} = \frac{(ze^2)^2 m^2}{4p_e^4} \frac{2\pi \sin\chi \, d\chi}{\sin^4(\chi/2)} = \frac{8\pi (ze^2)^2 m^2}{p_e^2 q^3} dq, \tag{3}$$

где

$$q = 2p_e \sin\frac{\chi}{2}, \quad 1 - \cos\chi = \frac{q^2}{2p_e^2}, \quad 0 \leqslant q \leqslant 2p_e$$

($\mathbf{p}_e = m\mathbf{v}_e$ — импульс электрона).

Функция $\varepsilon(\omega, q/\hbar) - 1$ определяется формулой (31,11) и складывается из электронной и ионной частей. Поскольку ее аргумент в (2) $\hbar\omega = \mathbf{qv}_i \ll qv_e$, то электронную часть можно взять при $\omega = 0$; тогда

$$\varepsilon\left(\frac{\mathbf{qv}_i}{\hbar}, \frac{q}{\hbar}\right) - 1 = \frac{\hbar^2}{q^2 a_e^2}\left\{2 + F\left(\frac{v_{iq}}{\sqrt{2}\, v_{Ti}}\right)\right\} \tag{4}$$

(v_{iq} — проекция $\mathbf{v}_i$ на $\mathbf{q}$; учтено, что при $z = 1$ $a_i = a_e$).

Подставив (3) и (4) в (2), после очевидных замен переменных получаем

$$\langle\sigma_t\rangle_i = \frac{2\sqrt{\pi}\, e^4}{p_e^4} \int\limits_0^{4p_e^2 a_e^2/\hbar^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-\xi^2} \, d\xi \, d\zeta}{[\zeta + 2 + F'(\xi)]^2 + [F''(\xi)]^2}$$

($F = F' + iF''$). Интегрирование по $d\zeta$ выполняется элементарно, а при подстановке пределов надо учесть, что $\hbar^2/p_e^2 a_e^2 \ll 1$, и отбросить все члены $\sim \hbar^2/p_e^2 a_e^2$ и выше. В результате получается

$$\langle\sigma_t\rangle_i = \frac{4\pi e^4}{m^2 v_e^4}\left[\ln\frac{2mv_e a_e}{\hbar} + A\right], \tag{5}$$

где

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2} \left\{\frac{2 + F'}{F''}\left[\operatorname{arctg}\frac{2 + F'}{F''} - \frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{2}\ln\left[(2 + F')^2 + F''^2\right]\right\} d\xi$$

(учтено, что $F'(\xi)$ — четная, $F''(\xi)$ — нечетная функции ξ); численное вычисление дает $A = -0{,}69$.

Усреднение в (1) производится с помощью формул

$$\langle v^{-1}\rangle = \left(\frac{2m}{\pi T}\right)^{1/2}, \quad \left\langle\frac{\ln v}{v}\right\rangle = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\left[\ln\frac{2T}{m} - C\right]$$

(C — постоянная Эйлера). Окончательно находим

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^4 N_e}{T^{3/2} m^{1/2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega^3} L_{\text{Б}}, \quad L_{\text{Б}} = \ln\frac{\alpha_{\text{Б}} (mT)^{1/2} a_e}{\hbar},$$

$$\ln\alpha_{\text{Б}} = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{C}{2} + A = \ln 1{,}06 \tag{6}$$

(*В. И. Перель, Г. М. Элиашберг*, 1961).

2. То же в квазиклассическом случае.

Решение. Согласно (46,23), выражение для σ_t в квазиклассическом случае получается вычитанием $\ln(\gamma e^2/\hbar v)$ из логарифма в (5):

$$\langle\sigma_t\rangle_i=\frac{2\pi e^4}{m^2v_e^4}\left[\ln\frac{2mv_e^2a_e}{\gamma e^2}+A\right]. \tag{7}$$

Для ε'' получается формула (6) с логарифмом

$$L_{\text{кл}}=\ln\frac{Ta_e\alpha_{\text{кл}}}{e^2},\qquad \ln\alpha_{\text{кл}}=2\ln 2-2C+A=\ln 0{,}63 \tag{8}$$

вместо $L_{\text{Б}}$.

3. С улучшенной логарифмической точностью определить скорость передачи энергии от электронов к ионам однозарядной ($z=1$) плазмы, считая разность температур электронов и ионов малой ($\delta T=T_e-T_i\ll T_e$) [1]).

Решение. Ввиду малости отношения m/M (а тем самым малости передачи энергии в каждом акте), заранее ясно, что уравнение для функции распределения электронов сводится к уравнению типа Фоккера—Планка. Оно имеет вид (см. § 21)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}=\frac{1}{p_e^2}\frac{\partial}{\partial p_e}\left\{p_e^2B(p_e)\left[\frac{\partial f_e}{\partial p_e}+\frac{v_e}{T_i}f_e\right]\right\}.$$

Умножим это уравнение на $p_e^2/2m$ и проинтегрируем по $4\pi p_e^2\,dp_e$. После интегрирования по частям получаем для скорости изменения энергии электронов:

$$\frac{dE_e}{dt}=-\int Bv_e\left[\frac{\partial f_e}{\partial p_e}+\frac{v_e}{T_i}f_e\right]d^3p_e.$$

Считая функцию распределения электронов максвелловской, а разность температур малой, находим

$$\frac{dE_e}{dt}=\left(\frac{1}{T_e}-\frac{1}{T_i}\right)\int Bv_e^2f_e\,d^3p_e\approx-\frac{\delta T}{T^2}N_e\langle Bv_e^2\rangle_e. \tag{9}$$

Коэффициент B, как и в (21,11), выражается через средний квадрат изменения импульса электрона при столкновении с ионом:

$$B=\frac{\sum(\Delta p_e)^2}{2\delta t}=\frac{1}{2}N_iv_e\int\langle(\Delta p_e)^2\rangle_i\,d\sigma. \tag{10}$$

Величину же Δp_e находим из равенства (46,5):

$$\Delta p_e\approx-\frac{\mathbf{Vq}}{v_e}\approx-\frac{\mathbf{v}_i\mathbf{q}}{v_e}\equiv\frac{v_{iq}q}{v_e}.$$

Подставляя в (10), а затем в (9) и используя связь q с углом рассеяния χ из задачи 1, получаем

$$\frac{dE_e}{dt}=-\frac{\delta T}{T^2}N\,m^2\langle v_e^3\langle v_{iq}^2\sigma_t\rangle_i\rangle_e\quad(N_i=N_e\equiv N). \tag{11}$$

---

[1]) Этот вопрос рассматривался *Р. Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе* и *В. П. Силиным* (1962).

Формула (11) вполне аналогична формуле (1) задачи 1, и дальнейшие вычисления поэтому практически те же самые. В борновском случае имеем

$$\langle v_{iq}^2 \sigma_t \rangle_i = \frac{4\pi e^4 T}{m^2 M v_e^4} \left[\ln \frac{2mv_e a_e}{\hbar} + A_1 \right],$$

где A_1 — интеграл, отличающийся от A задачи 1 дополнительным множителем $2\xi^2$ под знаком интеграла (численный расчет дает $A_1 = -0{,}52$). Усреднение по скоростям электронов производится, как в задаче 1. Окончательно

$$\frac{dE_e}{dt} = -\frac{4\sqrt{2\pi m}\, N^2 e^2}{MT^{3/2}} L_Б \delta T, \qquad L_Б = \ln \left(\beta_Б (mT)^{1/2} a_e/\hbar\right), \tag{12}$$

где

$$\ln \beta_Б = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{C}{2} + A_1 = \ln 1{,}26.$$

Аналогично в квазиклассическом случае получаем формулу вида (12), но с заменой $L_Б$ на

$$L_{кл} = \ln (T a_e \beta_{кл}/e^2), \qquad \ln \beta_{кл} = 2 \ln 2 - 2C + A_1 = \ln 0{,}75. \tag{13}$$

Формулы (12)—(13) уточняют результаты § 42, определяя (для случая малой разности температур) численный множитель под знаком логарифма в (42,6).

§ 47. Взаимодействие через плазменные волны

В некоторых случаях учет динамического экранирования кулоновского взаимодействия частиц в плазме приводит не только к уточнению аргумента кулоновского логарифма, но и к качественно новым эффектам. Для их изучения представим интеграл столкновений в виде, точно учитывающем вклад от рассеяния на малые углы и лишь с логарифмической точностью — вклад от рассеяния на большие углы.

В квазиклассическом случае большие углы рассеяния ($\chi \sim 1$) происходят от малых прицельных расстояний:

$$\rho \leqslant |ee'|/\mu \overline{v_{отн}^2}.$$

Искомый интеграл столкновений имеет вид интеграла Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$ из (46,15):

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2(ee')^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \int \frac{k_\alpha k_\beta \, d^3k}{k^4 \, |\varepsilon(\mathbf{kV}, k)|^2}, \tag{47,1}$$

где интегрирование производится по области до

$$k_{max} \sim \mu \overline{v_{отн}^2}/|ee'|. \tag{47,2}$$

В обратном, борновском случае искомая форма интеграла столкновений получается путем разложения подынтегрального выражения в (46,7) по степеням $\mathbf{q}$. В результате снова приходим к интегралу Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$, дающимися той же