Формула (11) вполне аналогична формуле (1) задачи 1, и дальнейшие вычисления поэтому практически те же самые. В борновском случае имеем

$$\langle v_{iq}^2 \sigma_t \rangle_i = \frac{4\pi e^4 T}{m^2 M v_e^4} \left[\ln \frac{2 m v_e a_e}{\hbar} + A_1 \right],$$

где A_1 — интеграл, отличающийся от A задачи 1 дополнительным множителем $2\xi^2$ под знаком интеграла (численный расчет дает $A_1 = -0{,}52$). Усреднение по скоростям электронов производится, как в задаче 1. Окончательно

$$\frac{dE_e}{dt} = -\frac{4\sqrt{2\pi m}\, N^2 e^2}{M T^{3/2}} L_Б \delta T, \qquad L_Б = \ln \left(\beta_Б (mT)^{1/2} a_e/\hbar\right), \tag{12}$$

где

$$\ln \beta_Б = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{C}{2} + A_1 = \ln 1{,}26.$$

Аналогично в квазиклассическом случае получаем формулу вида (12), но с заменой $L_Б$ на

$$L_{кл} = \ln (T a_e \beta_{кл}/e^2), \qquad \ln \beta_{кл} = 2 \ln 2 - 2C + A_1 = \ln 0{,}75. \tag{13}$$

Формулы (12)—(13) уточняют результаты § 42, определяя (для случая малой разности температур) численный множитель под знаком логарифма в (42,6).

§ 47. Взаимодействие через плазменные волны

В некоторых случаях учет динамического экранирования кулоновского взаимодействия частиц в плазме приводит не только к уточнению аргумента кулоновского логарифма, но и к качественно новым эффектам. Для их изучения представим интеграл столкновений в виде, точно учитывающем вклад от рассеяния на малые углы и лишь с логарифмической точностью — вклад от рассеяния на большие углы.

В квазиклассическом случае большие углы рассеяния ($\chi \sim 1$) происходят от малых прицельных расстояний:

$$\rho \leqslant |ee'|/\mu \overline{v_{отн}^2}.$$

Искомый интеграл столкновений имеет вид интеграла Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$ из (46,15):

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2(ee')^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \int \frac{k_\alpha k_\beta \, d^2 k}{k^4 \, |\varepsilon(\mathbf{kV}, k)|^2}, \tag{47,1}$$

где интегрирование производится по области до

$$k_{max} \sim \mu \overline{v_{отн}^2}/|ee'|. \tag{47,2}$$

В обратном, борновском случае искомая форма интеграла столкновений получается путем разложения подынтегрального выражения в (46,7) по степеням $\mathbf{q}$. В результате снова приходим к интегралу Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$, дающимися той же формулой (47,1) с тем лишь отличием, что теперь

$$k_{\max} \sim \mu \overline{v}_{\text{отн}}/\hbar \tag{47,3}$$

(значение $k = q/\hbar$ при передаче импульса $q \sim \mu \overline{v}_{\text{отн}}$). Напомним снова, что физический смысл обрезания на больших значениях k один и тот же в классическом и борновском случаях—обрезание производится на углах рассеяния $\chi \sim 1$; разная связь между k и χ в этих случаях приводит, однако, к разным выражениям для $k_{\max}$.

Интеграл столкновений Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$ из (47,1) называют *интегралом Балеску—Ленарда*[1]). Перепишем (47,1) в более удобном для последующего виде:

$$B_{\alpha\beta} = 2(ee')^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{k \leqslant k_{\max}} \delta(\omega - \mathbf{kv})\,\delta(\omega - \mathbf{kv}') \frac{k_\alpha k_\beta \, d^3k \, d\omega}{k^4 |\varepsilon(\omega, k)|^2}, \tag{47,4}$$

где теперь интегрирование производится по трехмерным (вместо двумерных) векторам $\mathbf{k}$. Две δ-функции в подынтегральном выражении обеспечивают равенство $\mathbf{kv} = \mathbf{kv}'$, т. е. поперечность $\mathbf{k}$ по отношению к $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Интегрирование же по $d\omega$ заменяет аргумент ω в $\varepsilon(\omega, k)$ требуемым значением $\omega = \mathbf{kv} = \mathbf{kv}' = \mathbf{kV}$.

Обратим внимание на то, что множитель $|\varepsilon(\omega, k)|^{-2}$ в подынтегральном выражении в (47,4) обращается в бесконечность при тех значениях $\omega = \mathbf{kV}$ и $\mathbf{k}$, для которых $\varepsilon(\omega, k) = 0$, т. е. при значениях, отвечающих закону дисперсии продольных плазменных волн. Эти значения $\mathbf{k}$ могут внести большой вклад в интеграл столкновений. Физически этот вклад можно описать как результат взаимодействия между частицами, осуществляемого путем испускания и поглощения ими плазменных волн. Эффект, однако, будет значительным, лишь если в плазме имеется достаточно много частиц, скорости которых сравнимы с фазовой скоростью волн $v_\text{ф} = \omega/k$ или превышают ее (только для таких частиц может выполняться требуемое соотношение $\omega = \mathbf{kV}$).

Рассмотрим плазму, в которой электроны и ионы имеют каждые свою температуру T_e и T_i. При $T_e \approx T_i$ в плазме могут распространяться (без заметного затухания) только электронные плазменные волны, фазовая скорость которых $v_\text{ф} \gg v_{Te}$; число электронов, могущих «обмениваться» волнами в этом случае, следовательно, экспоненциально мало.

Если же $T_e \gg T_i$, то в плазме могут распространяться также и ионно-звуковые волны, фазовая скорость которых удовлетворяет неравенствам

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \tag{47,5}$$

[1]) Формальный вывод этого интеграла будет дан в конце § 51.

Эти волны могут дать существенный вклад в интеграл столкновений между электронами (*В. П. Силин*, 1962).

Выделим из электрон-электронных величин $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ часть, связанную с этим эффектом; обозначим ее через $B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}$. Она возникает от области интегрирования в (47,4), лежащей в окрестности корня уравнения $\varepsilon(\omega, k)=0$, отвечающего закону дисперсии ионно-звуковых волн. Сам по себе этот корень $\omega(k)$ комплексен с малой мнимой частью (коэффициент затухания волны); когда ω пробегает вещественные значения в области интегрирования, вещественная часть функции $\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''$ проходит через нуль, а мнимая остается малой. Имея в виду формулу (30,9), представим множитель $|\varepsilon|^{-2}$ в подынтегральном выражении в (47,4) в виде

$$\frac{1}{|\varepsilon|^2}=\frac{1}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}=\frac{\pi}{|\varepsilon''|}\delta(\varepsilon').$$

Для электрон-электронного интеграла столкновений скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ в (47,4) относятся к электронам, а в силу неравенства $\omega \ll kv_{Te}$ в аргументах обеих δ-функций можно опустить члены ω. Таким образом, интересующая нас часть $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ принимает вид

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}=2\pi e^4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\delta(\mathbf{kv})\,\delta(\mathbf{kv}')\,\sigma(\varepsilon')\frac{k_\alpha k_\beta\,d^3k\,d\omega}{k^4|\varepsilon''(\omega, k)|}, \qquad (47,6)$$

причем интегрирование по d^3k производится (при заданном ω) по области (47,5).

Преобразуем интеграл по d^3k к новым переменным

$$\varkappa=\mathbf{kn},\quad k_1=\mathbf{kv},\quad k_2=\mathbf{kv}',$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $[\mathbf{vv}']$. Прямым вычислением якобиана преобразования находим, что d^3k заменяется на

$$\frac{d\varkappa\,dk_1\,dk_2}{|[\mathbf{vv}']|}.$$

Интегрирование по $dk_1\,dk_2$ устраняет δ-функции (в силу которых $k_1=k_2=0$), после чего будет $\mathbf{k}=\varkappa\mathbf{n}$. Переменная $\varkappa$ пробегает как положительные, так и отрицательные значения; условившись интегрировать только по положительным значениям, пишем

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}=\frac{2\pi e^4 n_\alpha n_\beta}{|[\mathbf{vv}']|}\,2\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta[\varepsilon'(\omega, \varkappa)]}{\varkappa^2|\varepsilon''(\omega, \varkappa)|}\,d\omega\,d\varkappa. \qquad (47,7)$$

Диэлектрическая проницаемость двухтемпературной плазмы в области ионно-звуковых волн (47,5) дается формулами[1])

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 1-\frac{\Omega_i^2}{\omega^2}+\frac{1}{k^2a_e^2}, \\ \varepsilon'' &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{k^3}\left\{\frac{\Omega_e^2}{v_{Te}^3}+\frac{\Omega_i^2}{v_{Ti}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Ti}^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{47,8}$$

Главный вклад в интеграл по $d\varkappa$ в (47,7) вносит (как это будет подтверждено дальнейшим вычислением) область $a_e\varkappa \gg 1$; поэтому последним членом в $\varepsilon'(\omega, \varkappa)$ можно пренебречь. Заметив, что

$$\delta\left(1-\frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right)=\frac{\Omega_i}{2}\left[\delta(\omega-\Omega_i)+\delta(\omega+\Omega_i)\right]$$

и выполнив в (47,7) интегрирование по $d\omega$, находим

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}=n_\alpha n_\beta\frac{4\pi e^4\Omega_i}{|[\mathbf{vv}']|}\int\frac{d\varkappa}{\varkappa^2\varepsilon''(\Omega_i, \varkappa)},$$

или, подставив выражение для ε'' и введя переменную $\xi=\varkappa^2a_i^2$,

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}=n_\alpha n_\beta\frac{2\sqrt{2\pi}\,e^4v_{Te}a_e^2}{|[\mathbf{vv}']|\,a_i^2}\int\frac{d\xi}{1+\exp(-1/2\xi+L_1/2)}, \tag{47,9}$$

где

$$L_1=\ln\frac{\Omega_i^4v_{Te}^6}{\Omega_e^4v_{Ti}^6}=\ln\frac{z^2MT_e^3}{mT_i^3}. \tag{47,10}$$

В силу условий (47,5), интегрирование в (47,9) должно производиться по области $(\Omega_ia_i/\Omega_ea_e)^2 \ll \xi \ll 1$. Поскольку интеграл сходится на малых ξ, нижний предел можно положить равным нулю.

При $L_1 \to \infty$ интеграл в (47,9) стремится к нулю; предполагая L_1 достаточно большим, вычислим его в логарифмическом приближении, т. е. ограничившись лишь первым членом разложения по $1/L_1$. Основной вклад в интеграл возникает от области, в которой можно пренебречь экспоненциальным членом в знаменателе. Для этого должно быть $-1/2\xi+L_1/2>1$, т. е. интеграл надо брать в пределах от 0 до $1/(L_1-1)\approx 1/L_1$, что дает просто $1/L_1$ [2]). Таким образом, окончательно имеем

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}=n_\alpha n_\beta\frac{2\sqrt{2\pi}\,e^4zv_{Te}T_e}{|[\mathbf{vv}']|\,T_iL_1}. \tag{47,11}$$

[1]) См. (33,3). В (47,8) учтен также и ионный вклад в ε''. Хотя в области (47,5) он экспоненциально мал, но им определяется область интегрирования в интеграле (47,9) ниже.

[2]) В существенной для интеграла области $\xi \sim 1/L_1$, т. е. $\varkappa \sim 1/a_iL_1^{1/2}$. При этом

$$\varkappa a_e \sim a_e/a_iL_1^{1/2} \sim (T_e/T_iL_1)^{1/2} \gg 1$$

в соответствии со сделанным выше предположением.

Полное значение величин $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ в электрон-электронном интеграле столкновений получается сложением (47,11) с обычным кулоновским выражением (41,8), причем в аргументе кулоновского логарифма L дебаевский радиус

$$a=(a_e^{-2}+a_i^{-2})^{-1/2}\approx a_i.$$

Вклад плазменных волн (47,11) становится преобладающим при

$$zT_e/T_iLL_1\gg 1. \qquad (47,12)$$

§ 48. Поглощение в плазме в высокочастотном пределе

Область частот, в которой справедлива формула (44,9) для мнимой части диэлектрической проницаемости плазмы, ограничена неравенствами $\Omega_e\gg\omega\gg\nu_{ei}$; левое неравенство есть общее условие применимости интеграла столкновений с экранированным кулоновским взаимодействием. Рассмотрим теперь обратный по отношению к последнему условию предельный случай, когда

$$\omega\gg\Omega_e. \qquad (48,1)$$

Сразу же отметим, что в этом случае вещественная часть проницаемости, ε', заведомо близка к 1, а мнимая часть, ε'', мала.

К диссипации энергии внешнего переменного поля приводят ei-столкновения, длительность которых порядка или меньше периода поля. Это значит, что при $\omega\gg\Omega_e$ будут существенны столкновения, происходящие на расстояниях $\sim v_{Te}/\omega\ll v_{Te}/\Omega_e=a_e$. На таких расстояниях кулоновское поле ионов уже не экранировано и, таким образом, столкновения приобретают чисто двухчастичный характер (а не многочастичный, каковыми по существу являются столкновения с экранированным взаимодействием). В этих условиях микроскопические акты поглощения энергии поля становятся процессами, обратными к тормозному излучению при парных столкновениях заряженных частиц. Это обстоятельство позволяет с помощью принципа детального равновесия выразить ε'' через сечение тормозного излучения (*В. Л. Гинзбург*, 1949).

Диссипация Q энергии электромагнитного поля в единице объема среды за единицу времени выражается через ε'' формулой (30,5). Чтобы связать эту величину с сечением тормозного излучения, примем, что поле создается монохроматической плоской волной, в которой плотность энергии равна

$$\mathscr{E}=\frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi}=\frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi}$$

(в последнем выражении предполагается, что $\mathbf{E}$ выражено в комплексном виде—ср. примечание на стр. 159); ввиду близости диэлектрической проницаемости к единице полагаем здесь $\varepsilon=1$.