Полное значение величин $B^{(ee)}_{\alpha\beta}$ в электрон-электронном интеграле столкновений получается сложением (47,11) с обычным кулоновским выражением (41,8), причем в аргументе кулоновского логарифма L дебаевский радиус

$$a=(a_e^{-2}+a_i^{-2})^{-1/2}\approx a_i.$$

Вклад плазменных волн (47,11) становится преобладающим при

$$zT_e/T_iLL_1\gg 1. \qquad (47,12)$$

§ 48. Поглощение в плазме в высокочастотном пределе

Область частот, в которой справедлива формула (44,9) для мнимой части диэлектрической проницаемости плазмы, ограничена неравенствами $\Omega_e\gg\omega\gg\nu_{ei}$; левое неравенство есть общее условие применимости интеграла столкновений с экранированным кулоновским взаимодействием. Рассмотрим теперь обратный по отношению к последнему условию предельный случай, когда

$$\omega\gg\Omega_e. \qquad (48,1)$$

Сразу же отметим, что в этом случае вещественная часть проницаемости, ε', заведомо близка к 1, а мнимая часть, ε'', мала.

К диссипации энергии внешнего переменного поля приводят ei-столкновения, длительность которых порядка или меньше периода поля. Это значит, что при $\omega\gg\Omega_e$ будут существенны столкновения, происходящие на расстояниях $\sim v_{Te}/\omega\ll v_{Te}/\Omega_e=a_e$. На таких расстояниях кулоновское поле ионов уже не экранировано и, таким образом, столкновения приобретают чисто двухчастичный характер (а не многочастичный, каковыми по существу являются столкновения с экранированным взаимодействием). В этих условиях микроскопические акты поглощения энергии поля становятся процессами, обратными к тормозному излучению при парных столкновениях заряженных частиц. Это обстоятельство позволяет с помощью принципа детального равновесия выразить ε'' через сечение тормозного излучения (*В. Л. Гинзбург*, 1949).

Диссипация Q энергии электромагнитного поля в единице объема среды за единицу времени выражается через ε'' формулой (30,5). Чтобы связать эту величину с сечением тормозного излучения, примем, что поле создается монохроматической плоской волной, в которой плотность энергии равна

$$\mathscr{E}=\frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi}=\frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi}$$

(в последнем выражении предполагается, что $\mathbf{E}$ выражено в комплексном виде—ср. примечание на стр. 159); ввиду близости диэлектрической проницаемости к единице полагаем здесь $\varepsilon=1$.

После этого формулу (30,5) можно записать в виде

$$Q = \omega\varepsilon''\mathscr{E}. \tag{48,2}$$

С другой стороны, диссипация равна разности между энергией $Q_{\text{погл}}$, поглощаемой при столкновениях электронов с ионами, и энергией, излучаемой в этих столкновениях. При этом подразумевается именно энергия $Q_{\text{вын}}$ вынужденного (а не спонтанного) излучения, приводящего к появлению фотонов, когерентных с исходным полем и в этом смысле неотличимых от него.

Запишем сечение спонтанного испускания фотона, т. е. обычного тормозного излучения, в виде

$$d\sigma_{\text{сп}} = \frac{w(\mathbf{p}', \mathbf{p})}{v}\,\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,d^3p'. \tag{48,3}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — волновой вектор фотона, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы электрона. Произведение $N_i v\, d\sigma_{\text{сп}}$ (где N_i — плотность числа ионов) есть вероятность излучения фотона электроном за единицу времени; функция $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ зависит также и от поляризации испускаемого фотона. Проинтегрировав по направлениям $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$ и просуммировав по поляризациям фотона, получим дифференциальное (по частотам) сечение тормозного излучения $d\sigma_\omega$; δ-функция в (48,3) устраняется интегрированием по $\varepsilon' = p'^2/2m$. Таким образом,

$$d\sigma_\omega = \frac{4m^2v'}{\pi v c^3}\,\overline{w}\,\omega^2 d\omega,$$

где $\overline{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — значение функции $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, усредненной по направлениям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$; это значение не зависит уже от поляризации фотона, и потому суммирование по последним сводится к умножению на 2. Введя «эффективное излучение» $\varkappa_\omega$ по определению

$$\hbar\omega\, d\sigma_\omega = \varkappa_\omega d\omega,$$

выразим отсюда $\overline{w}$ в виде

$$\overline{w} = \frac{\pi v c^3}{4m^2 v'\hbar\omega^3}\,\varkappa_\omega. \tag{48,4}$$

Сечение вынужденного излучения отличается от (48,3) лишь множителем $N_{\mathbf{k}\mathbf{e}}$ — числом фотонов в квантовом состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$ и направлением поляризации $\mathbf{e}$ вдоль $\mathbf{E}$ (см. IV, § 44). Поэтому полная энергия вынужденного излучения равна

$$Q_{\text{вын}} = N_i \sum_{\mathbf{e}} \int N_{\mathbf{k}\mathbf{e}}\hbar\omega w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f(\mathbf{p})\,\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,d^3p\,d^3p',$$

где $f(\mathbf{p})$ — функция распределения электронов. Ниже будем считать эту функцию максвелловской, зависящей только от абсолютной величины p. Усреднив по направлениям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ и заметив, что ввиду монохроматичности поля

$$\sum_{\mathbf{e}} \int N_{\mathbf{k}\mathbf{e}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega},$$

перепишем $Q_{\text{вын}}$ в виде

$$Q_{\text{вын}} = N_i \mathscr{E} \int \overline{w} f(p)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)\, d^3p\, d^3p'. \tag{48,5}$$

Аналогичным образом вычисляется энергия, поглощаемая при обратных переходах с изменением импульса электрона $\mathbf{p}' \to \mathbf{p}$ (неупругое рассеяние электрона в электромагнитном поле). При этом, согласно принципу детального равновесия, функции вероятности w, определяющие сечения прямого и обратного процессов, равны между собой. Поэтому для $Q_{\text{погл}}$ получается выражение, отличающееся от (48,5) лишь заменой функции распределения $f(p)$ на $f(p')$. Диссипация $Q = Q_{\text{погл}} - Q_{\text{вын}}$; сравнив это выражение с (48,2), получим

$$\varepsilon'' = \frac{N_i}{\omega} \int \overline{w}\, [f(p') - f(p)]\, \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)\, d^3p\, d^3p'. \tag{48,6}$$

Ограничимся частотами, для которых

$$\hbar\omega \ll T. \tag{48,7}$$

Тогда разность $p' - p$ мала и можно положить

$$f(p') - f(p) = -\frac{df}{d\varepsilon}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{T} f(p),$$

а в остальных множителях $p = p'$. Подставив это в (48,6) и выразив $\overline{w}$ через $\varkappa_\omega$ согласно (48,4), находим окончательно следующее выражение для мнимой части проницаемости:

$$\varepsilon''(\omega) = N_i N_e \frac{\pi^2 c^3}{T\omega^3} \langle v \varkappa_\omega \rangle, \tag{48,8}$$

где угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению электронов.

Применим эту формулу к двум предельным случаям — квазиклассическому и борновскому. В первом случае, т. е. при

$$ze^2/\hbar v \gg 1, \tag{48,9}$$

ограничим еще область частот $\omega \gg \Omega_e$ более узким интервалом

$$mv_{Te}^3/ze^2 \gg \omega \gg \Omega_e \tag{48,10}$$

(слева стоит величина, обратная ко времени пролета электрона на таком расстоянии от иона, на котором угол рассеяния становится ~ 1); легко видеть, что из условий (48,9—10) автоматически следует (48,7). В квазиклассическом случае эффективное излучение на частотах (48,10) при столкновении электрона с неподвижным ионом дается формулой

$$\varkappa_\omega = \frac{16z^2e^6}{3v^2c^3m^2} \ln \frac{2mv^3}{\gamma\omega z e^2}, \tag{48,11}$$

где $\gamma = e^C = 1{,}78\ldots$, C — постоянная Эйлера (см. II, (70,21)). Подставив в (48,8) и произведя усреднение, получим[1])

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ze^4N_e}{T^{3/2}m^{1/2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega^3} \ln \frac{2^{5/2}T^{3/2}}{\gamma^{5/2}\omega z e^2 m^{1/2}}. \tag{48,12}$$

В борновском случае, т. е. при $ze^2/\hbar v \ll 1$, эффективное излучение на частотах $\hbar\omega \ll T$ дается формулой[2])

$$\varkappa_\omega = \frac{16z^2e^6}{3v^2c^3m^2} \ln \frac{2mv^2}{\hbar v}. \tag{48,13}$$

Вычисление по (48,8) приводит к выражению

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ze^4N_e}{m^{1/2}T^{3/2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega^3} \ln \frac{4T}{\gamma\hbar\omega}, \tag{48,14}$$

отличающемуся от (44,9) лишь аргументом логарифма.

§ 49. Квазилинейная теория затухания Ландау

Изложенная в §§ 29—32 теория плазменных колебаний основана на решении кинетического уравнения в линейном приближении теории возмущений. Условие ее применимости состоит в малости поправки к функции распределения δf (29,2) по сравнению с невозмущенной функцией f_0:

$$\frac{e\mathbf{E}}{|\mathbf{kv}-\omega|} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \ll f_0. \tag{49,1}$$

Для слабозатухающих плазменных колебаний с частотой $\approx \Omega_e$ и волновым вектором $k \ll \Omega_e/v_{Te}$ необходимо, таким образом,

[1]) При этом используется значение интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -C.$$

[2]) См. IV, (92,16). При переходе от этой формулы к (48,14) учтено также, что при $\hbar\omega \ll T = mv_{Te}^2$ электрон теряет при излучении лишь малую часть своей энергии.