(слева стоит величина, обратная ко времени пролета электрона на таком расстоянии от иона, на котором угол рассеяния становится ~ 1); легко видеть, что из условий (48,9—10) автоматически следует (48,7). В квазиклассическом случае эффективное излучение на частотах (48,10) при столкновении электрона с неподвижным ионом дается формулой

$$\varkappa_\omega = \frac{16z^2e^6}{3v^2c^3m^2}\ln\frac{2mv^3}{\gamma\omega ze^2}, \tag{48,11}$$

где $\gamma = e^C = 1,78\ldots$, C — постоянная Эйлера (см. II, (70,21)). Подставив в (48,8) и произведя усреднение, получим[1])

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4N_e}{T^{3/2}m^{1/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3}\ln\frac{2^{5/2}T^{3/2}}{\gamma^{5/2}\omega ze^2m^{1/2}}. \tag{48,12}$$

В борновском случае, т. е. при $ze^2/\hbar v \ll 1$, эффективное излучение на частотах $\hbar\omega \ll T$ дается формулой[2])

$$\varkappa_\omega = \frac{16z^2e^6}{3v^2c^3m^2}\ln\frac{2mv^2}{\hbar v}. \tag{48,13}$$

Вычисление по (48,8) приводит к выражению

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4N_e}{m^{1/2}T^{3/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3}\ln\frac{4T}{\gamma\hbar\omega}, \tag{48,14}$$

отличающемуся от (44,9) лишь аргументом логарифма.

§ 49. Квазилинейная теория затухания Ландау

Изложенная в §§ 29—32 теория плазменных колебаний основана на решении кинетического уравнения в линейном приближении теории возмущений. Условие ее применимости состоит в малости поправки к функции распределения δf (29,2) по сравнению с невозмущенной функцией f_0:

$$\frac{e\mathbf{E}}{|\mathbf{kv}-\omega|}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \ll f_0. \tag{49,1}$$

Для слабозатухающих плазменных колебаний с частотой $\approx \Omega_e$ и волновым вектором $k \ll \Omega_e/v_{Te}$ необходимо, таким образом,

[1]) При этом используется значение интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -C.$$

[2]) См. IV, (92,16). При переходе от этой формулы к (48,14) учтено также, что при $\hbar\omega \ll T = mv_{Te}^2$ электрон теряет при излучении лишь малую часть своей энергии.

чтобы было

$$\frac{eE}{\Omega_e}\frac{\partial f_0}{\partial p} \ll f_0.$$

Для максвелловской плазмы это условие (после возведения обеих его сторон в квадрат) можно записать так:

$$E^2/4\pi \ll N_e T_e. \tag{49,2}$$

В таком виде оно имеет простой физический смысл: плотность энергии волнового поля должна быть много меньше плотности кинетической энергии электронов плазмы.

Условие (49,2) обеспечивает малость поправки δf для основной массы электронов. Но и при его выполнении существует относительно небольшое число частиц, для которых условие (49,1) может нарушаться,—частицы, движущиеся почти в фазе с волной ($\mathbf{kv} \approx \omega$) и тем самым принимающие участие в затухании Ландау (*резонансные* частицы); даже слабое поле может существенно изменить их функцию распределения. Это изменение будет нелинейным эффектом, и потому его характер существенно зависит от спектрального (по ω и по $\mathbf{k}$) состава волнового поля; дело в том, что лишь в линейном приближении различные фурье-компоненты поля независимы в своем воздействии на частицы.

Мы будем рассматривать здесь электромагнитные возмущения в плазме, представляющие собой совокупность плазменных волн с волновыми векторами, пробегающими непрерывный ряд значений в некотором интервале $\Delta\mathbf{k}$.

Если начальное возмущение содержит широкий спектр волновых векторов $k \sim \Omega_e/v_{Te}$, то затухание Ландау распространяется на большое число электронов, находящихся (в смысле воздействия на них поля) в одинаковых условиях. В результате искажение функции распределения окажется относительно малым при всех скоростях; линейная теория (при условии (49,2)) будет, следовательно, применима для всего хода эволюции возмущения.

Напротив, если возмущение содержит волновые векторы лишь в узком интервале $\Delta\mathbf{k}$ вокруг некоторого значения k_0, для которого $k_0 \ll \Omega_e/v_{Te}$, то резонансный интервал скоростей электронов

$$|\Delta\mathbf{v}| \sim \Delta\frac{\Omega_e}{k} \sim \frac{v_0}{k_0}|\Delta\mathbf{k}|, \qquad \mathbf{v}_0 = \frac{\Omega_e}{k_0}\frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \tag{49,3}$$

тоже мал и расположен вокруг значения $v_0 \gg v_{Te}$. В затухании Ландау будет, следовательно, участвовать сравнительно небольшое число электронов и их функция распределения может в результате сильно измениться.

Количественную теорию этого явления мы изложим для случая, когда возмущение представляет собой почти монохроматическую волну, амплитуда и фаза которой модулированы в пространстве по некоторому статистическому закону. Спектр значений $\mathbf{k}$ начального возмущения узок,

$$|\Delta\mathbf{k}|/k_0 \ll 1, \tag{49,4}$$

но и в то же время

$$\frac{|\Delta\mathbf{k}|}{k} \gg \frac{1}{v_0}\left(\frac{e|\varphi_0|}{m}\right)^{1/2}, \tag{49,5}$$

где φ_0 — порядок величины амплитуды потенциала электрического поля волн (смысл этого условия выяснится ниже); отметим, что в силу (49,2) (где $E \sim k\varphi_0$) выражение в правой стороне неравенства (49,5) мало: $e|\varphi_0|/mv_0^2 \ll 1$. Мы будем также считать поле в среднем однородным по всему объему плазмы; это значит, что квадрат $\mathbf{E}^2$, усредненный по статистическому распределению фаз и интенсивностей волн, не зависит от координат (такое усреднение эквивалентно усреднению по участкам пространства с размерами $\Delta x \gg 1/|\Delta\mathbf{k}|$).

Представим поле $\mathbf{E}$ в начальный момент времени в виде интеграла Фурье:

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{49,6}$$

где в силу условия вещественности $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^*$. Предположение (49,4) о характере начального возмущения означает, что интегрирование в (49,6) фактически ведется лишь в окрестностях точек $\mathbf{k} = \pm\mathbf{k}_0$. Условие же пространственной однородности возмущения легко сформулировать, написав квадратичный тензор $E_\alpha E_\beta$ в виде двойного интеграла:

$$E_\alpha E_\beta = \int\int E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6}.$$

После усреднения по статистическому распределению, это выражение должно оказаться не зависящим от $\mathbf{r}$[1]). Для этого среднее значение $\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta}\rangle$ должно содержать δ-функцию $\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$. Имея также в виду продольность плазменных волн, напишем

$$\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta}\rangle = (2\pi)^3 \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{49,7}$$

---

[1]) Для возмущений рассматриваемого типа интегралы $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, dx^3$ фактически расходятся, поскольку $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ не исчезает на бесконечности. Это обстоятельство, однако, несущественно для формальных выводов, имеющих дело с заведомо конечными средними квадратами.

Это соотношение надо рассматривать как определение величин обозначенных здесь символически посредством $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$. Отметим, что эти величины вещественны. Выражение (49,7) отлично от нуля лишь при $\mathbf{k}=-\mathbf{k}'$ и симметрично по отношению к перестановкам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Поэтому $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}=(\mathbf{E}^2)_{-\mathbf{k}}$, а перемена знака $\mathbf{k}$ эквивалентна комплексному сопряжению. Средний квадрат $\langle \mathbf{E}^2\rangle$ выражается через эти величины согласно

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle=\int (\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{49,8}$$

Интегрирование в (49,6), а потому и в (49,8), производится, как уже указывалось, по окрестностям точек $\mathbf{k}_0$ и $-\mathbf{k}_0$. Удобнее, однако, исключить из рассмотрения вектор $-\mathbf{k}_0$, представив (49,6) в виде

$$\mathbf{E}=\int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} \mathbf{E}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}+\text{к.с.}, \tag{49,9}$$

где интегрирование производится уже только по окрестности точки $\mathbf{k}=\mathbf{k}_0$, а к.с. означает комплексно-сопряженное выражение. Соответственно (49,8) запишется как

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle=2\int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} (\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{49,10}$$

а соотношения (49,7) — в виде

$$\begin{gathered}\langle E_{\mathbf{k}\alpha}E^*_{\mathbf{k}'\beta}\rangle=(2\pi)^3(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\ \langle E_{\mathbf{k}\alpha}E_{\mathbf{k}'\beta}\rangle=0.\end{gathered} \tag{49,11}$$

Дальнейшая эволюция возмущения (49,9) со временем представится выражением

$$\mathbf{E}=\int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\mathbf{E}_\mathbf{k}(t)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}+\text{к.с.}, \tag{49,12}$$

где $\omega(\mathbf{k})\approx\Omega_e$ — частота плазменных волн, а коэффициенты $\mathbf{E}_\mathbf{k}(t)$ медленно меняются за счет затухания Ландау. В аналогичном виде представим и функцию распределения электронов

$$f=f_0(t,\mathbf{p})+\left\{\int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} f_\mathbf{k}(t,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}+\text{к.с.}\right\}. \tag{49,13}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой быстро осциллирующую в пространстве и времени «хаотическую» часть изменения функции распределения; она исчезает при статистическом усреднении волн. Член же $f_0(t, \mathbf{p})$ — медленно меняющееся, усредненное распределение[1]).

Наша цель состоит в получении системы уравнений, определяющих эволюцию усредненных характеристик состояния плазмы — функций $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$ и $f_0(t, \mathbf{p})$. Для того чтобы такая система могла быть замкнутой, эти характеристики должны охватывать собой все электроны, участвующие в интересующих нас нелинейных эффектах. Для этого в свою очередь интервал скоростей (49,3), отвечающий разбросу волновых векторов $\Delta\mathbf{k}$, во всяком случае должен широко перекрывать амплитуду колебаний скорости электронов под влиянием поля резонансных с ними волн. Именно это условие и выражается неравенством (49,5); $(e|\varphi_0|/m)^{1/2}$ — порядок величины указанной амплитуды. Действительно, в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, поле последней статично и представляет собой последовательность потенциальных горбов с высотой $|\varphi_0|$. В этой системе резонансный электрон совершает колебания между двумя горбами, причем его скорость меняется в интервале между $\pm(2e|\varphi_0|/m)^{1/2}$.

Одно из уравнений, связывающих $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$ с f_0, выражает собой затухание Ландау каждой из фурье-компонент поля:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k} = -2\gamma_\mathbf{k}(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}, \tag{49,14}$$

где

$$\gamma_\mathbf{k} = 2\pi^2 e^2 \Omega_e \int \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{kv})\, d^3p \tag{49,15}$$

есть, согласно (32,6) и (30,1), амплитудный коэффициент затухания волн; множитель 2 в правой стороне уравнения (49,14) связан с квадратичностью величины $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$.

Второе уравнение получим, исходя из кинетического уравнения бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{49,16}$$

Применим его сначала в линейном приближении к отдельной фурье-компоненте возмущения. В последнем члене уравнения, уже содержащем малую величину $\mathbf{E}_\mathbf{k} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, полагаем $f \approx f_0$. В первом же пренебрегаем медленной зависимостью $f_\mathbf{k}$ от t. В результате получим для $f_\mathbf{k}$ обычное выражение

$$f_\mathbf{k} = \frac{ie\mathbf{E}_\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \tag{49,17}$$

причем, как всегда, в дальнейших интегрированиях надо понимать ω как $\omega + i0$.

[1]) Не смешивать его с равновесным максвелловским распределением!

Далее подставим в (49,16) полные выражения $\mathbf{E}$ и f в виде (49,12) и (49,13) (с $f_{\mathbf{k}}$ из (49,17)) и произведем усреднение по статистическому распределению волн с помощью (49,11). Все линейные по возмущению члены при этом исчезают, квадратичные же члены определят производную $\partial f_0/\partial t$ в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=e^2\frac{\partial f_0}{\partial p_\beta}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}\left[\frac{i}{\omega-kv+i0}-\frac{i}{\omega-kv-i0}\right]\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Заменив разность в квадратных скобках, согласно (29,8), на $2\pi\delta(\omega-\mathbf{kv})$, получим окончательно

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(D_{\alpha\beta}^{(\text{н})}\frac{\partial f_0}{\partial p_\beta}\right), \qquad (49,18)$$

где

$$D_{\alpha\beta}^{(\text{н})}(\mathbf{p})=2\pi e^2\int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0}(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\delta(\omega-\mathbf{kv})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (49,19)$$

Уравнения (49,14) и (49,18) составляют искомую полную систему. Основанную на этих уравнениях теорию плазменных волн называют *квазилинейной* [1]).

Уравнение (49,18) имеет вид уравнения диффузии в пространстве скоростей, причем $D_{\alpha\beta}^{(\text{н})}$ играет роль тензора коэффициентов диффузии (индекс (н) напоминает о том, что эта «диффузия» связана с эффектами нелинейности). Эти коэффициенты как функции скорости электронов отличны от нуля в интервале $\Delta\mathbf{v}$ вблизи $\mathbf{v}_0$, связанном с разбросом $\Delta\mathbf{k}$ согласно (49,3). В этой области скоростей и будет происходить диффузия и соответственно возникает искажение функции распределения (остающейся максвелловской для всей остальной массы электронов). Характер этого искажения очевиден из общих свойств всяких диффузионных процессов: диффузия приводит к сглаживанию, т. е. в данном случае—к возникновению в «хвосте» функции $f_0(p)$ (при $v\approx v_0\gg v_{Te}$) плато ширины $\sim\Delta v$, как это изображено схематически на рис. 13. Отметим, что при таком характере искажения изменяется главным образом производная $\partial f_0/\partial p$, а само значение f_0 остается близким к максвелловскому.

Оценим время релаксации этого процесса, $\tau_{\text{н}}$. Поскольку речь идет о выравнивании на интервале $\Delta p=m\Delta v$, то

$$\tau_{\text{н}}\sim m^2(\Delta v)^2/D^{(\text{н})}. \qquad (49,20)$$

Для оценки коэффициента диффузии замечаем, что согласно (49,10)

[1]) Она была развита *А. А. Веденовым, Е. П. Велиховым* и *Р. З. Сагдеевым* (1961). Уравнения (49,14), (49,18) были независимо сформулированы также *Ю. А. Романовым* и *Г. Ф. Филипповым* (1961), и *Драммондом* и *Пайнсом* (*W. E. Drummond, D. Pines, 1961*).

$(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}(\Delta k/2\pi)^3 \sim \langle \mathbf{E}^2 \rangle$. Наличие же в подынтегральном выражении в (49,19) δ-функции эквивалентно, по порядку величины, умножению интеграла на $1/v_0 \Delta k$. Таким образом,

$$D^{(\text{н})} \sim \frac{e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle}{v_0 \Delta k} \sim \frac{e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle}{k_0 \Delta v}. \qquad (49,21)$$

Наконец, выразив $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ через амплитуду φ_0 колебаний потенциала ($\sim k^2 |\varphi_0|^2$) и подставив (49,21) в (49,20), найдем[1])

$$\tau_{\text{н}} \sim \frac{(\Delta v)^3}{k_0 (e\,|\varphi|_0/m)^2}. \qquad (49,22)$$

В изложенном рассмотрении подразумевается, конечно, что время $\tau_{\text{н}}$ мало по сравнению со временем затухания Ландау: $\tau_{\text{н}} \ll 1/\gamma$; в противном случае волны затухнут, прежде чем успеют

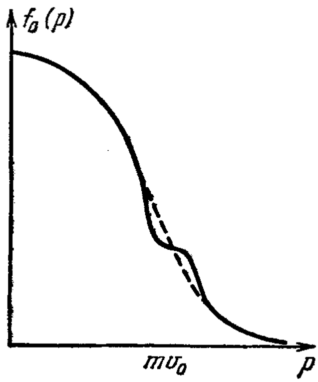

Рис. 13.

проявиться эффекты нелинейности. В то же время применимость уравнения (49,14) предполагает малость времени $1/\gamma$ по сравнению со временем свободного пробега электронов: $1/\gamma \ll 1/\nu_e$, где ν_e — средняя частота столкновений. Последнее условие, однако, не гарантирует еще законности пренебрежения столкновениями в рассматриваемом явлении (т. е. законности использования здесь кинетического уравнения в виде (49,16)): для конкуренции с нелинейными эффектами существенно не общее время столкновительной релаксации, а лишь время столкновительной релаксации в интервале скоростей Δv; обозначим его как $\tau_{\text{ст}}$.

---

[1]) При $\Delta v \sim (e\,|\varphi_0|/m)^{1/2}$, когда изложенная теория уже, строго говоря, неприменима (знак $\sim$ вместо знака $\gg$ в (49,5)), эта оценка дает $\tau_{\text{н}} \sim k_0^{-1}(m/e\,|\varphi_0|)^{1/2}$. Именно этот результат и следовало ожидать, когда разброс резонансных скоростей Δv совпадает с амплитудой скорости электронов при их колебаниях в поле волны: по порядку величина $\tau_{\text{н}}$ совпадает с периодом этих колебаний.

Поскольку речь идет о релаксации в интервале Δv, расположенном вблизи значения $v_0 \gg v_{Te}$ и в котором содержится лишь относительно малая доля всех электронов, то ситуация аналогична той, с которой мы имели дело в задаче об убегающих электронах. Процесс представляет собой диффузию в импульсном пространстве с коэффициентом диффузии

$$D^{(\text{ст})} = m^2 \nu_{ee}(v)\, v_{Te}^2 = \frac{4\pi e^4 L N_e T_e}{m v^3} \approx \frac{m^2 \nu_{ee}(v_{Te})\, v_{Te}^5}{v^3} \tag{49,23}$$

(коэффициент при $\partial f/\partial p$ в плотности потока в импульсном пространстве (45,5)).

Искомое время столкновительной релаксации в интервале Δv отличается от (49,20) заменой $D^{(\text{н})}$ на $D^{(\text{ст})}$:

$$\tau_{\text{ст}} \sim \frac{m^2 (\Delta v)^2}{D^{(\text{ст})}} \sim \frac{(\Delta v)^2}{v_{Te}^2 \nu_{ee}(v_{Te})} \left(\frac{v_0}{v_{Te}}\right)^3. \tag{49,24}$$

При

$$\tau_{\text{н}} \gg \tau_{\text{ст}} \tag{49,25}$$

(т. е. $D^{(\text{н})} \ll D^{(\text{ст})}$) нелинейные эффекты не играют роли: столкновения успевают поддерживать максвелловское распределение вблизи $\mathbf{v}_0$, несмотря на возмущение от волнового поля; соответственно коэффициент затухания Ландау будет даваться обычным выражением, отвечающим максвелловскому значению производной $\partial f_0/\partial \mathbf{p}$ в окрестности $\mathbf{v}_0$. Таким образом, неравенство (49,25) есть условие применимости строго линейной теории затухания Ландау. Напомним в то же время, что излагаемая квазилинейная теория справедлива при гораздо более слабом условии (49,2). Условие (49,25) можно представить в виде

$$\frac{E^2}{4\pi} \ll N_e T_e \left[\sqrt{4\pi} L \eta^{3/2} \left(\frac{v_{Te}}{v_0}\right)^3 \frac{\Delta v}{v_0}\right],$$

где $\eta = e^2 N^{1/3}/T$ — параметр газовости. Малость множителя, заключенного в квадратные скобки, демонстрирует слабость условия (49,2) по сравнению с (49,25).

В обратном предельном случае, при $\tau_{\text{н}} \ll \tau_{\text{ст}}$, нелинейные эффекты приводят к сильному уменьшению производной $\partial f_0/\partial p$ в указанной области, грубо говоря, в отношении $D^{(\text{ст})}/D^{(\text{н})}$. Соответственно уменьшается коэффициент затухания Ландау.

§ 50. Кинетическое уравнение для релятивистской плазмы

Если скорости частиц (электронов) в плазме не малы по сравнению со скоростью света, кинетическое уравнение должно быть записано с учетом релятивистских эффектов (*С. Т. Беляев, Г. И. Будкер*, 1956).