Поскольку речь идет о релаксации в интервале Δv, расположенном вблизи значения $v_0 \gg v_{Te}$ и в котором содержится лишь относительно малая доля всех электронов, то ситуация аналогична той, с которой мы имели дело в задаче об убегающих электронах. Процесс представляет собой диффузию в импульсном пространстве с коэффициентом диффузии

$$D^{(\text{ст})} = m^2 \nu_{ee}(v)\, v_{Te}^2 = \frac{4\pi e^4 L N_e T_e}{m v^3} \approx \frac{m^2 \nu_{ee}(v_{Te})\, v_{Te}^5}{v^3} \qquad (49,23)$$

(коэффициент при $\partial f/\partial p$ в плотности потока в импульсном пространстве (45,5)).

Искомое время столкновительной релаксации в интервале Δv отличается от (49,20) заменой $D^{(\text{н})}$ на $D^{(\text{ст})}$:

$$\tau_{\text{ст}} \sim \frac{m^2 (\Delta v)^2}{D^{(\text{ст})}} \sim \frac{(\Delta v)^2}{v_{Te}^2 \nu_{ee}(v_{Te})} \left(\frac{v_0}{v_{Te}}\right)^3. \qquad (49,24)$$

При

$$\tau_{\text{н}} \gg \tau_{\text{ст}} \qquad (49,25)$$

(т. е. $D^{(\text{н})} \ll D^{(\text{ст})}$) нелинейные эффекты не играют роли: столкновения успевают поддерживать максвелловское распределение вблизи $\mathbf{v}_0$, несмотря на возмущение от волнового поля; соответственно коэффициент затухания Ландау будет даваться обычным выражением, отвечающим максвелловскому значению производной $\partial f_0/\partial \mathbf{p}$ в окрестности $\mathbf{v}_0$. Таким образом, неравенство (49,25) есть условие применимости строго линейной теории затухания Ландау. Напомним в то же время, что излагаемая квазилинейная теория справедлива при гораздо более слабом условии (49,2). Условие (49,25) можно представить в виде

$$\frac{E^2}{4\pi} \ll N_e T_e \left[\sqrt{4\pi} L \eta^{3/2} \left(\frac{v_{Te}}{v_0}\right)^3 \frac{\Delta v}{v_0}\right],$$

где $\eta = e^2 N^{1/3}/T$ — параметр газовости. Малость множителя, заключенного в квадратные скобки, демонстрирует слабость условия (49,2) по сравнению с (49,25).

В обратном предельном случае, при $\tau_{\text{н}} \ll \tau_{\text{ст}}$, нелинейные эффекты приводят к сильному уменьшению производной $\partial f_0/\partial p$ в указанной области, грубо говоря, в отношении $D^{(\text{ст})}/D^{(\text{н})}$. Соответственно уменьшается коэффициент затухания Ландау.

§ 50. Кинетическое уравнение для релятивистской плазмы

Если скорости частиц (электронов) в плазме не малы по сравнению со скоростью света, кинетическое уравнение должно быть записано с учетом релятивистских эффектов (*С. Т. Беляев, Г. И. Будкер*, 1956).

Покажем предварительно, что функция распределения в фазовом пространстве, $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, является релятивистски инвариантной величиной. Для этого заметим, что пространственная плотность частиц и плотность их потока, т. е. интегралы

$$N = \int f\, d^3p, \quad \mathbf{i} = \int \mathbf{v} f\, d^3p,$$

должны составлять 4-вектор $i^k = (cN, \mathbf{i})$ (ср. II, § 28)[1]. Имея в виду, что в релятивистской механике скорость частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией ε есть $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\varepsilon$, можно записать этот 4-вектор в виде

$$i^k = c^2 \int p^k f \frac{d^3p}{\varepsilon}, \tag{50,1}$$

где $p^k = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$ — 4-импульс. Но выражение d^3p/ε является 4-скаляром (см. II, § 10). Ясно поэтому, что из 4-векторности интеграла (50,1) следует, что функция f — 4-скаляр[2].

Переходя к выводу кинетического уравнения, замечаем, что произведенные в § 41 вычисления остаются в силе и в релятивистском случае вплоть до выражения (41,3—4) для плотности потока в импульсном пространстве. Необходимо лишь вычислить заново величины

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta v_{\text{отн}}\, d\sigma. \tag{50,2}$$

Величина $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ здесь — по-прежнему относительная скорость двух частиц. Напомним, однако, что в релятивистской механике она определяется как скорость одной частицы в системе покоя другой и, вообще говоря, не сводится к разности $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ (см. II, § 12).

Выясним, прежде всего, трансформационный характер этих величин. Произведение

$$v_{\text{отн}}\, d\sigma \cdot f f'\, d^3p\, d^3p'\, d^3x\, dt$$

есть число актов рассеяния, происходящих в объеме d^3x в течение времени dt между двумя частицами с импульсами в заданных интервалах d^3p и d^3p'; по своему определению это число есть инвариант. Переписав его в виде

$$\varepsilon\varepsilon' v_{\text{отн}}\, d\sigma \cdot f \cdot f' \cdot \frac{d^3p}{\varepsilon} \cdot \frac{d^3p'}{\varepsilon'} \cdot d^3x\, dt$$

[1]) В этом параграфе латинскими буквами k, l обозначаются четырехмерные векторные индексы. Скалярное произведение двух 4-векторов a и b обозначается как $(ab) \equiv a_k b^k$.

[2]) Функция же распределения по одним лишь импульсам, т. е. интеграл $f(t, \mathbf{p}) = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d^3x$, уже не является 4-скаляром (именно такая функция рассматривается в II, § 10).

и заметив, что последние пять множителей (отделенных точками) инвариантны, заключаем, что и первый множитель, $\varepsilon\varepsilon' v_{\text{отн}}\, d\sigma$, есть инвариант. Отсюда в свою очередь следует, что интегралы

$$W^{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' \int q^k q^l v_{\text{отн}}\, d\sigma \tag{50,3}$$

образуют симметричный 4-тензор. Величины же (50,2) связаны с пространственными компонентами этого 4-тензора согласно

$$B_{\alpha\beta} = \frac{W^{\alpha\beta}}{\varepsilon\varepsilon'}. \tag{50,4}$$

Вычислим сначала 4-тензор (50,3) в системе отсчета, в которой одна из частиц (скажем, частица e) покоится. Релятивистское сечение резерфордовского рассеяния частиц e' на покоящихся (до столкновения) частицах e при малых углах рассеяния χ имеет вид[1])

$$d\sigma = \frac{4(ee')^2 \varepsilon'^2}{p'^4 \chi^4} 2\pi\chi\, d\chi. \tag{50,5}$$

Такое же вычисление, как при выводе (41,8), приводит к следующему выражению для пространственных компонент тензора (50,3):

$$W^{\alpha\beta} = 2\pi (ee')^2 L\left(v'^2 \delta_{\alpha\beta} - v'_\alpha v'_\beta\right) mc^2 \frac{\varepsilon'}{v'^3}. \tag{50,6}$$

Остальные же компоненты надо считать равными нулю:

$$W^{00} = W^{0\alpha} = 0. \tag{50,7}$$

Действительно, изменение энергии частиц при столкновении (q^0) в рассматриваемой системе отсчета есть величина второго порядка по малому углу рассеяния; поэтому $W^{0\alpha}$ и W^{00} оказались бы величинами третьего или четвертого порядка малости, между тем как весь вывод интеграла столкновений производится лишь с точностью до величин второго порядка.

Из (50,6—7) имеем

$$W_k^k = -W_\alpha^\alpha = -4\pi (ee')^2 Lmc^2\varepsilon'/v'.$$

Этот 4-скаляр можно записать в инвариантном виде, заметив, что в системе покоя частицы e имеем

$$(uu') = \frac{\varepsilon'}{m'c^2}, \qquad \frac{[(uu')^2 - 1]^{1/2}}{(uu')} = \frac{v'}{c},$$

---

[1]) Это выражение относится к рассеянию электронов как на электронах, так и на ионах. В первом случае оно получается из IV, (81,7), а во втором — из сечения рассеяния на неподвижном кулоновском центре IV, (80,7).

где $u^k = p^k/mc$, $u'^k = p'^k/m'c$ — 4-скорости обеих частиц. Поэтому

$$W_k^k = -4\pi (ee')^2 Lmm'c^4 \frac{(uu')^2}{c[(uu')^2-1]^{1/2}}. \qquad (50,8)$$

Из (50,6—7) находим также, что

$$W^{kl}u_l = W^{kl}u'_l = 0, \qquad (50,9)$$

а ввиду релятивистски инвариантного вида этих равенств они справедливы и в любой системе отсчета.

Выражение 4-тензора W^{kl}, справедливое в произвольной системе отсчета, должно, очевидно, быть симметричным по отношению к обеим частицам. Общий вид такого 4-тензора, зависящего только от 4-векторов u^k и u'^k, есть

$$W^{kl} = \alpha g^{kl} + \beta (u^k u^l + u'^k u'^l) + \delta (u^k u'^l + u'^k u^l),$$

где α, β, δ — скаляры. Определив последние из условий (50,8—9), получим

$$W^{kl} = 2\pi (ee')^2 L \frac{mm'c^4 (uu')^2}{c[(uu')^2-1]^{3/2}} \times$$
$$\times \{-[(uu')^2-1] g^{kl} - (u^k u^l + u'^k u'^l) + (uu')(u^k u'^l + u'^k u^l)\}. \qquad (50,10)$$

Наконец, взяв пространственную часть этого 4-тензора в произвольной системе отсчета, получим окончательно следующее выражение для величин $B_{\alpha\beta}$, входящих в интеграл столкновений:

$$B_{\alpha\beta} = 2\pi (ee')^2 L \frac{\gamma\gamma' (1 - \mathbf{v}\mathbf{v}'/c^2)^2}{c[\gamma^2\gamma'^2 (1-\mathbf{v}\mathbf{v}'/c^2)^2 - 1]^{3/2}} \left\{ \left[\gamma^2\gamma'^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)^2 - 1\right] \delta_{\alpha\beta} - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma^2}{c^2} v_\alpha v_\beta - \frac{\gamma'^2}{c^2} v'_\alpha v'_\beta + \frac{\gamma^2\gamma'^2}{c^2}\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)(v_\alpha v'_\beta + v'_\alpha v_\beta) \right\}, \qquad (50,11)$$

где

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{mc^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \gamma' = \frac{\varepsilon'}{m'c^2} = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

— лоренцевы множители для обеих частиц. Отметим, что, несмотря на свой более сложный (чем в нерелятивистском случае) вид, трехмерный тензор (50,11) по-прежнему удовлетворяет соотношениям

$$B_{\alpha\beta} v_\beta = B_{\alpha\beta} v'_\beta. \qquad (50,12)$$

Для оценки кулоновского логарифма заметим, что в релятивистском случае имеет место борновская ситуация; $ze^2/\hbar v \sim ze^2/\hbar c \ll 1$. Поэтому для ee- и ei-столкновений

$$L \approx \ln (pa/\hbar) \approx \ln (T_e a/\hbar c). \qquad (50,13)$$

Для ii-столкновений надо заменить T_e на T_i (если ионы тоже релятивистские) или же пользоваться обычными нерелятивистскими выражениями.

Кинетическое уравнение с кулоновским интегралом столкновений имеет смысл до тех пор, пока резерфордовское рассеяние является главной причиной изменения импульса и энергии электрона. Конкурирующим процессом здесь является тормозное излучение (а при наличии в плазме заметного числа фотонов — также и эффект Комптона). Сечение (транспортное) резерфордовского рассеяния имеет порядок величины

$$\sigma_{\text{рез}} \sim z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 L \sim z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{T_e}\right)^2 L. \qquad (50,14)$$

Сечение же тормозного испускания фотонов с энергией $\hbar\omega \sim T_e$:

$$\sigma_{\text{торм}} \sim \frac{z^2}{137} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln \frac{T_e}{mc^2} \qquad (50,15)$$

(ср. IV, (93,17)). Эти сечения сравниваются при

$$\frac{T_e}{mc^2} \sim \left(\frac{137L}{\ln(137L)}\right)^{1/2}.$$

Задачи

1. Найти скорость передачи энергии от электронов с температурой $T_e \gg mc^2$ к ионам с температурой $T_i \ll Mc^2$.

Решение. Вплоть до (42,3), произведенные в § 42 вычисления остаются в силе. Величины же $B^{(ei)}_{\alpha\beta}$ берем из (50,4), (50,6), положив $v' \approx c$:

$$B^{(ei)}_{\alpha\alpha} = 4\pi e^4 z^2 L/c.$$

В результате находим

$$\frac{dE_i}{dt} = -\frac{dE_e}{dt} = \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{4\pi z^2 e^4 N_i N_e L}{Mc}.$$

Выразив энергию ультрарелятивистских электронов через их температуру согласно $E_e = 3T_e N_e$ (см. задачу в V, § 44), получим

$$\frac{dT_e}{dt} = -(T_e - T_i) \frac{4\pi z^2 e^4 N_i L}{3McT_e}.$$

2. Найти электропроводность релятивистской лоренцевой плазмы.

Решение. После пренебрежения ee-столкновениями и перехода к пределу $M \to \infty$, ход решения в релятивистском случае совпадает с решением нерелятивистской задачи в § 44. Для поправки к функции распределения в постоянном ($\omega = 0$) электрическом поле снова получается

$$\delta f = -\frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}}{T_e \nu_{ei}(p)} f_0$$

(ср. (44,5)), с той лишь разницей, что частота столкновений определяется теперь релятивистским сечением резерфордовского рассеяния:

$$\nu_{ei}(p) = N_i v \sigma_t, \qquad \sigma_t \approx \int \frac{\chi^2}{2} d\sigma = \frac{4\pi z^2 e^4 L}{v^2 p^2}.$$

Вычислив ток как интеграл $-e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p$, получим для электропроводности

$$\sigma = \frac{\langle v^3 p^2\rangle}{12\pi z e^2 T_e L}.$$

В ультрарелятивистском случае $v \approx c$, $\langle p^2\rangle = 12\,(T_e/c)^2$, так что

$$\sigma = cT_e/\pi z e^2 L.$$

§ 51. Флуктуации в плазме

Теория флуктуаций в плазме строится в принципе так же, как и в обычном газе (§§ 19, 20). Разновременные корреляторы, например

$$\langle \delta f_a(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)\, \delta f_b(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\rangle, \quad \langle \delta\varphi(t_1, \mathbf{r}_1)\, \delta f_a(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\rangle$$

(φ — потенциал электрического поля; индексы a, b отличают сорта частиц), удовлетворяют при $t = t_1 - t_2 > 0$ той же системе уравнений — линеаризованных кинетического уравнения и уравнения Пуассона, что и функции распределения $\bar{f}_a$ и потенциал $\bar{\varphi}$. Для решения этой системы необходимо знать, в качестве начального условия, соответствующие одновременные корреляторы. Но в отличие от равновесного газа нейтральных частиц, в плазме имеется одновременная корреляция между положениями различных частиц, связанная с их кулоновским взаимодействием и простирающаяся на большое ($\sim a$) расстояние. В равновесном случае эта корреляция описывается корреляторами плотности, вычисленными в V, § 79. В неравновесных же случаях определение одновременных корреляторов является трудной задачей.

Эту трудность, однако, можно преодолеть в общем виде в случае бесстолкновительной плазмы. Заметим, что именно для бесстолкновительной плазмы задача о флуктуациях в стационарном неравновесном состоянии ставится в особенности естественным образом, поскольку в такой плазме в отсутствие внешнего поля любые функции распределения $\bar{f}_a(\mathbf{p})$, зависящие только от импульсов частиц, являются стационарным решением кинетического уравнения. Коррелятор флуктуаций относительно такого распределения, как и в равновесном случае, будет зависеть от координат двух точек и от двух моментов времени только через разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $t = t_1 - t_2$. Бесстолкновительность плазмы означает при этом, что рассматриваются времена t, малые по сравнению с $1/\nu$, где ν — эффективная частота столкновений. Излагаемый ниже метод применим именно в этих условиях; бесстолкновительность используется в нем с самого начала. Он основан на непосредственном усреднении произведений точных флуктуирующих функций распределения $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ [1]).

[1]) Этот метод принадлежит *Ростокеру* (*N. Rostoker*, 1961) и *Ю. Л. Климонтовичу* и *В. П. Силину* (1962).