Вычислив ток как интеграл $-e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p$, получим для электропроводности

$$\sigma=\frac{\langle v^3p^2\rangle}{12\pi z e^2 T_e L}.$$

В ультрарелятивистском случае $v\approx c$, $\langle p^2\rangle=12(T_e/c)^2$, так что

$$\sigma=cT_e/\pi z e^2 L.$$

§ 51. Флуктуации в плазме

Теория флуктуаций в плазме строится в принципе так же, как и в обычном газе (§§ 19, 20). Разновременные корреляторы, например

$$\langle \delta f_a(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)\,\delta f_b(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\rangle, \quad \langle \delta\varphi(t_1, \mathbf{r}_1)\,\delta f_a(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\rangle$$

(φ — потенциал электрического поля; индексы a, b отличают сорта частиц), удовлетворяют при $t=t_1-t_2>0$ той же системе уравнений — линеаризованных кинетического уравнения и уравнения Пуассона, что и функции распределения $\bar f_a$ и потенциал $\bar\varphi$. Для решения этой системы необходимо знать, в качестве начального условия, соответствующие одновременные корреляторы. Но в отличие от равновесного газа нейтральных частиц, в плазме имеется одновременная корреляция между положениями различных частиц, связанная с их кулоновским взаимодействием и простирающаяся на большое ($\sim a$) расстояние. В равновесном случае эта корреляция описывается корреляторами плотности, вычисленными в V, § 79. В неравновесных же случаях определение одновременных корреляторов является трудной задачей.

Эту трудность, однако, можно преодолеть в общем виде в случае бесстолкновительной плазмы. Заметим, что именно для бесстолкновительной плазмы задача о флуктуациях в стационарном неравновесном состоянии ставится в особенности естественным образом, поскольку в такой плазме в отсутствие внешнего поля любые функции распределения $\bar f_a(\mathbf{p})$, зависящие только от импульсов частиц, являются стационарным решением кинетического уравнения. Коррелятор флуктуаций относительно такого распределения, как и в равновесном случае, будет зависеть от координат двух точек и от двух моментов времени только через разности $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ и $t=t_1-t_2$. Бесстолкновительность плазмы означает при этом, что рассматриваются времена t, малые по сравнению с $1/\nu$, где ν — эффективная частота столкновений. Излагаемый ниже метод применим именно в этих условиях; бесстолкновительность используется в нем с самого начала. Он основан на непосредственном усреднении произведений точных флуктуирующих функций распределения $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$[1]).

[1]) Этот метод принадлежит *Ростокеру* (*N. Rostoker*, 1961) и *Ю. Л. Климонтовичу* и *В. П. Силину* (1962).

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{df_a}{dt}=\frac{\partial f_a}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}}-e_a\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}=0, \tag{51,1}$$

где φ — точный потенциал электрического поля, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\varphi=-4\pi\sum_a e_a\int f_a\,d^3p. \tag{51,2}$$

Уравнения (51,1) выражают собой аналог теоремы Лиувилля. Подчеркнем, что в этих точных уравнениях еще не пренебрежено столкновениями. Точные функции распределения

$$f_a(t,\mathbf{r},\mathbf{p})=\sum\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]\,\delta[\mathbf{p}-\mathbf{p}_a(t)] \tag{51,3}$$

(суммирование по всем частицам сорта a) учитывают движение частиц по траекториям $\mathbf{r}=\mathbf{r}_a(t)$, являющимся точными решениями уравнений движения системы взаимодействующих частиц. Уравнения (51,1) легко проверить прямым дифференцированием выражений (51,3) с учетом уравнений движения частиц в самосогласованном поле.

Уравнения (51,1—2) сами по себе довольно бесполезны; пользоваться функциями распределения в виде (51,3) — все равно, что следить за каждой частицей в отдельности. Если же усреднить их по физически бесконечно малым объемам[1]), получатся обычные кинетические уравнения. Положив $f_a=\bar{f}_a+\delta f_a$, $\varphi=\bar{\varphi}+\delta\varphi$ и усреднив уравнения (не производя при этом никаких пренебрежений!), получим

$$\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{r}}-e_a\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{r}}=e_a\left\langle\frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{p}}\right\rangle, \tag{51,4}$$

$$\Delta\bar{\varphi}=-4\pi\sum_a e_a\int \bar{f}_a\,d^3p. \tag{51,5}$$

Правая сторона в (51,4) есть интеграл столкновений[2]).

Вычтя (51,4—5) из точных уравнений (51,1—2), получим уравнения для флуктуирующих частей функций распределения и потенциала. При этом квадратичные по $\delta\varphi$ и δf_a члены в кинетическом уравнении описывают влияние столкновений на флуктуации. Пренебрегая этими членами и рассматривая пространственно-однородный случай, т. е. положив

$$\bar{f}_a=\bar{f}_a(\mathbf{p}),\quad \bar{\varphi}=0, \tag{51,6}$$

[1]) Или, что то же, по начальным условиям точной механической задачи отвечающим заданному макроскопическому состоянию.

[2]) Мы еще вернемся к этому выражению в конце параграфа, а пока отметим лишь, что оно соответствует правой части уравнения (16,7) в случае, когда взаимодействие частиц — кулоновское.

получим уравнения

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}}-e_a\frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}}=0, \tag{51,7}$$

$$\Delta\delta\varphi=-4\pi\sum_a e_a\int \delta f_a\,d^3p. \tag{51,8}$$

Эти уравнения позволяют выразить функции $\delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в произвольный момент времени t через их значения в некоторый начальный момент $t=0$; тем самым оказывается возможным выразить и коррелятор

$$\langle \delta f_a(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)\,\delta f_b(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)\rangle \tag{51,9}$$

через его значение при $t_1=t_2=0$. Это начальное значение коррелятора (обозначим его через $g_{ab}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$) есть в значительной степени (см. ниже) произвольная функция. Сразу же подчеркнем, что оно отнюдь не является тем одновременным коррелятором, нахождение которого (вместе с полным разновременным коррелятором) составляет нашу цель. Центральный пункт, обеспечивающий эффективность излагаемого метода, состоит в том, что при произвольном выборе функции g вычисленный таким образом коррелятор (51,9) с течением времени (t_1, t_2 порядка времени затухания Ландау) сведется к функции только от разности $t=t_1-t_2$, не зависящей от выбора g. Тем самым задача будет решена: эта предельная функция и будет искомым разновременным коррелятором, а его значение при $t_1-t_2=0$ — одновременным коррелятором.

Переходя к проведению указанной программы, введем компоненты разложения Фурье по координатам и одностороннего разложения Фурье по времени:

$$\delta f^{(+)}_{a\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p})=\int d^3x\int_0^\infty dt\cdot e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\,\delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{51,10}$$

и аналогично для $\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$. Умножив уравнения (51,7—8) на $e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ и интегрируя по dt от 0 до ∞ и по d^3x, получим

$$i(\mathbf{kv}-\omega)\,\delta f^{(+)}_{a\omega\mathbf{k}}-ie_a\mathbf{k}\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}=\delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}),$$

$$-k^2\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}=4\pi\sum_a e_a\int \delta f^{(+)}_{a\omega\mathbf{k}}\,d^3p. \tag{51,11}$$

С подобными уравнениями мы уже неоднократно встречались (ср. (34,10—11)); из них находим

$$\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}=-\frac{4\pi}{k^2\varepsilon_l(\omega, k)}\sum_a e_a\int\frac{\delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})}{i(\mathbf{kv}-\omega)}\,d^3p, \tag{51,12}$$

где ε_l—диэлектрическая проницаемость плазмы с распределением $\bar{f}(p)$ [1]). Перемножение таких двух выражений и статистическое усреднение дают

$$\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle = \\ = \frac{16\pi^2}{k^4\varepsilon_l(\omega, k)\,\varepsilon_l(\omega', k')}\sum_{a,b} e_a e_b \int \frac{\langle\delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})\,\delta f_{b\mathbf{k}'}(0, \mathbf{p}')\rangle}{i(\mathbf{kv}-\omega)\,i(\mathbf{k}'\mathbf{v}'-\omega')}\,d^3p\,d^3p'. \quad (51,13)$$

Среднее значение в числителе подынтегрального выражения связано с фурье-компонентой $g_{ab\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ «начального» коррелятора $g_{ab}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ формулой

$$\langle\delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})\,\delta f_{b\mathbf{k}'}(0, \mathbf{p}')\rangle = (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,g_{ab\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

(ср. (19,13)). Как и всякая одновременная корреляционная функция, начальный коррелятор должен содержать δ-функционный член, выражающий те случаи, когда всего одна частица находится в совпадающих элементах фазового пространства:

$$\delta_{ab}\bar{f}(p)\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)$$

(см. (19,6)). Фурье-образ этого члена есть $\delta_{ab}\bar{f}(p)\,\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)$. Таким образом, в (51,13) надо положить

$$\langle\delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})\,\delta f_{b\mathbf{k}'}(0, \mathbf{p}')\rangle = \\ = (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,[\delta_{ab}\bar{f}_a(p)\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')], \quad (51,14)$$

где $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ есть произвольная гладкая (без особенностей при вещественных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$) функция—фурье-образ некоторой функции $\mu(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, стремящейся к нулю при $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$.

При подстановке в (51,13) член с этой произвольной функцией в (51,14) дает

$$\frac{4(2\pi)^5\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{k^4\varepsilon_l(\omega, k)\,\varepsilon_l(\omega', k')}\sum_{a,b}\int\frac{\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,d^3p\,d^3p'}{i(\mathbf{kv}-\omega)\,i(\mathbf{kv}'-\omega')}. \quad (51,15)$$

Покажем, что это выражение отвечает во временном представлении функции, быстро затухающей с увеличением t или t'.

Переход от лапласовского (см. примечание на стр. 173) образа $\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle$ к функции времени t_2 и $t_1=t_2+t$ осуществляется формулой обращения

$$\langle\delta\varphi_{\mathbf{k}}(t_1)\,\delta\varphi_{\mathbf{k}'}(t_2)\rangle = \int e^{-i\omega t_1-i\omega' t_2}\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\,\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}, \quad (51,16)$$

---

[1]) Лишь для упрощения записи последующих формул будем считать, что функция $\bar{f}(p)$ изотропна, так что соответствующий ей тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ сводится к скалярам ε_l и ε_t.

где интегрирование производится по путям в плоскостях комплексных переменных ω и ω', проходящим выше всех особых точек подынтегрального выражения. Нас интересует асимптотика выражения (51,16) при t_1, $t_2 \to \infty$. Для ее нахождения надо смещать контуры интегрирования вниз до тех пор, пока они не «зацепятся» за особые точки; так, особенность в точке $\omega = \omega_c$ приведет к асимптотической зависимости интеграла по $d\omega$ от времени вида $\exp(-i\omega_c t)$. Легко видеть, что выражение (51,15) имеет особенности лишь в нижних полуплоскостях ω или ω' (но не на вещественных осях этих переменных) и потому асимптотика интеграла (51,16) с (51,15) в качестве $\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\,\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle$ содержит только затухающие члены.

Рассмотрим, например, интеграл по ω. Множитель $1/\varepsilon_l(\omega, k)$ в (51,15) имеет полюсы в нулях функции $\varepsilon_l(\omega, k)$, расположенных лишь в нижней полуплоскости ω[1]). Таким же свойством обладает и интеграл по d^3p в (51,15). Действительно, этот интеграл имеет вид

$$\int \frac{\psi(z)\,dz}{z-\omega/k-i0},$$

где $z \equiv p_x$ — проекция вектора $\mathbf{p}$ на направление $\mathbf{k}$, причем (согласно предположенным свойствам функции $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$) множитель $\psi(z)$ мог бы иметь особые точки лишь при комплексных значениях z. Интеграл такого вида был уже рассмотрен в конце § 29 и было показано, что он может иметь полюсы лишь в нижней полуплоскости ω.

Таким образом, интересующая нас незатухающая часть коррелятора возникает только от вклада от первого члена в (51,14) в интеграл (51,13):

$$\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle = -\frac{4(2\pi)^5\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{k^4\varepsilon_l(\omega, k)\,\varepsilon_l(\omega', k)}\sum_a e_a^2 \int \frac{\bar{f}_a(p)\,d^3p}{(\omega-\mathbf{kv}+i0)(\omega'+\mathbf{kv}+i0)}. \quad (51,17)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, написав

$$[(\omega-\mathbf{kv}+i0)(\omega'+\mathbf{kv}+i0)]^{-1} = \frac{1}{\omega+\omega'+i0}\left[\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}+i0}+\frac{1}{\omega'+\mathbf{kv}+i0}\right].$$

При дальнейшем интегрировании по ω' в (51,16) незатухающий при $t \to \infty$ вклад возникает от вычета в полюсе $\omega' = -\omega - i0$, который обходится контуром интегрирования, как это показано

[1]) Подразумевается, что распределение $\bar{f}(p)$ отвечает устойчивому состоянию плазмы, так что плазменные волны затухают. Очевидно, что только в таком случае имеет вообще смысл постановка задачи о стационарных флуктуациях.

на рис. 14; в этом смысле множитель $1/(\omega+\omega')$ надо понимать как $-2\pi i\delta(\omega+\omega')$. Смысл же множителей $1/(\omega\pm\mathbf{kv})$ при последующем интегрировании по ω определяется формулой (29,8), согласно которой

$$\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}+i0}-\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}-i0}=-2\pi i\delta(\omega-\mathbf{kv})$$

(это обозначение подразумевает, что интегрирования по ω и ω' производятся уже по вещественной оси).

Таким образом, для вычисления коррелятора в асимптотическом пределе больших времен t, в интеграле (51,17) надо заменить

$$[(\omega-\mathbf{kv}+i0)(\omega'+\mathbf{kv}+i0)]^{-1}\to-(2\pi)^2\delta(\omega+\omega')\delta(\omega-\mathbf{kv}). \quad (51,18)$$

В результате получим[1])

$$\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle=(2\pi)^4\delta(\omega+\omega')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}, \quad (51,19)$$

где

$$(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}=\frac{32\pi^3}{k^4|\varepsilon_l(\omega,k)|^2}\sum_a e_a^2\int\overline{f}_a(p)\,\delta(\omega-\mathbf{kv})\,d^3p. \quad (51,20)$$

Из определения (51,19) видно (ср. (19,13)), что величины $(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}$ представляют собой искомый фурье-образ корреляционный функции — спектральный коррелятор. Таким образом, формула (51,20) решает поставленную задачу для флуктуаций потенциала.

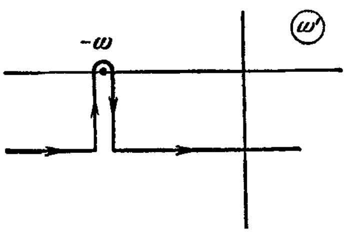

Рис. 14.

Аналогичным образом определяются и другие корреляторы. Так, выразив из (51,11) $\delta f^{(+)}_{a\omega'\mathbf{k}'}$ через $\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}$, умножив на $\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$ из (51,12) и усреднив, получим коррелятор потенциала и функции распределения[2]):

$$(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}=\frac{e_a\mathbf{k}}{\mathbf{kv}-\omega+i0}\frac{\partial\overline{f}_a}{\partial\mathbf{p}}(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}+\frac{8\pi^2e_a}{k^2\varepsilon_l(\omega,k)}\overline{f}_a(p)\,\delta(\omega-\mathbf{kv}). \quad (51,21)$$

[1]) Во избежание недоразумений напомним, что это — не все выражение, а только его особая по $\omega+\omega'$ часть, определяющая асимптотическое поведение коррелятора. В полном выражении отнюдь не все члены содержали бы $\delta(\omega+\omega')$, поскольку соответствующая функция от t_1, t_2 зависит от разности $t=t_1-t_2$ лишь асимптотически, при больших t_1, t_2.

[2]) Обратим внимание на обратное правило обхода в первом члене ($\omega-i0$ вместо $\omega+i0$). Оно возникло из-за того, что при $\omega=-\omega'$, $\mathbf{k}=-\mathbf{k}'$

$$(\mathbf{k}'\mathbf{v}-\omega'-i0)^{-1}=-(\mathbf{kv}-\omega+i0)^{-1},$$

Напомним, что порядок, в котором написаны $\delta\varphi$ и δf_a в символе $(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}$, существен: по определению (ср. V, (122,11)), (51,21) есть фурье-образ пространственно-временного коррелятора

$$\langle\delta\varphi(t,\ \mathbf{r})\,\delta f_a(0,\ 0)\rangle.$$

Если же определить коррелятор как $\langle\delta f_a(t,\ \mathbf{r})\,\delta\varphi(0,\ 0)\rangle$, то будет

$$(\delta f_a\delta\varphi)_{\omega\mathbf{k}} = (\delta\varphi\delta f_a)_{-\omega-\mathbf{k}} = (\delta\varphi\delta f_a)^*_{\omega\mathbf{k}} \tag{51,22}$$

(ср. V, (122,13)).

Наконец, спектральный коррелятор функций распределения

$$\begin{aligned}(\delta f_a\delta f_b)_{\omega\mathbf{k}} = {} & 2\pi\delta_{ab}\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\bar f_a(p_1)\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1) + \\ & + \frac{e_a e_b(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1+i0)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_2-i0)}\left(\mathbf{k}\frac{\partial\bar f_a}{\partial\mathbf{p}_1}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial\bar f_b}{\partial\mathbf{p}_2}\right) - \\ & - \frac{8\pi^2 e_a e_b}{k^2}\left\{\left(\mathbf{k}\frac{\partial\bar f_a}{\partial\mathbf{p}_1}\right)\bar f_b\,\frac{\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_2)}{\varepsilon_l(\omega,\ k)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1+i0)} + \right. \\ & \left. + \left(\mathbf{k}\frac{\partial\bar f_b}{\partial\mathbf{p}_2}\right)\bar f_a\,\frac{\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1)}{\varepsilon_l^*(\omega,\ k)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_2-i0)}\right\}.\end{aligned} \tag{51,23}$$

Это — фурье-образ коррелятора

$$\langle\delta f_a(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{p}_1)\,\delta f_b(0,\ 0,\ \mathbf{p}_2)\rangle.$$

Если в формулах (51,20—23) выбрать в качестве $\bar f_a$ максвелловские функции f_{0a}, получим корреляторы флуктуаций в равновесной бесстолкновительной плазме.

Рассмотрим, например, флуктуации потенциала. Для максвелловской плазмы мнимую часть продольной диэлектрической проницаемости можно представить в виде

$$\varepsilon_l''(\omega,\ k) = \frac{4\pi^2\omega}{k^2 T}\sum_a e_a^2\int f_{0a}(p)\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\,d^3p \tag{51,24}$$

(см. (30,1); обобщение на несколько сортов частиц очевидно). Введя это выражение в (51,20), получим

$$(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{8\pi T\varepsilon_l''(\omega,\ k)}{\omega k^2|\varepsilon_l(\omega,\ k)|^2}. \tag{51,25}$$

Коррелятор же напряженности продольного электрического поля

$$(E_\alpha E_\beta)_{\omega\mathbf{k}} = k_\alpha k_\beta(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}. \tag{51,26}$$

Этот результат можно было бы, конечно, получить и из общей макроскопической теории равновесных электромагнитных флуктуации, изложенной в IX, §§ 75—77 [1]). Согласно этой теории, спектральный коррелятор напряженности электрического поля выражается через запаздывающую гриновскую функцию формулой, которая в классическом пределе ($\hbar\omega \ll T$) принимает вид

$$(E_\alpha E_\beta)_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{2\omega T}{\hbar c^2}\,\mathrm{Im}\, D^R_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \tag{51,27}$$

(см. IX, (76,3), (77,2)). В среде с пространственной дисперсией гриновская функция [2])

$$D^R_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2\varepsilon_t/c^2 - k^2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \frac{4\pi\hbar c^2}{\omega^2 \varepsilon_l}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \tag{51,28}$$

Подстановка продольной части этой функции (второй член) в (51,27) и даст (51,25—26).

Наконец, вернемся к уравнению (51,4) и покажем, что стоящее в его правой части выражение

$$e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left\langle \frac{\partial \delta\varphi(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}\,\delta f_a(t, \mathbf{r}; \mathbf{p})\right\rangle \tag{51,29}$$

действительно совпадает с известным выражением интеграла столкновений в плазме. Величина (51,29) получается из корреляционной функции $\langle \delta\varphi(t, \mathbf{r})\,\delta f_a(0, 0)\rangle$ дифференцированием по $\mathbf{r}$, после чего надо положить в ней $\mathbf{r} = 0$. Таким образом, найдем

$$\left\langle \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}}\delta f_a\right\rangle = \int i\mathbf{k}\,(\delta\varphi\,\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}\frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4} = -\int \mathbf{k}\,\mathrm{Im}\,(\delta\varphi\,\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}\frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4} \tag{51,30}$$

(в последнем равенстве учтено (51,22)). Но из (51,21) имеем (используя также (51,20) и (51,24))

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\delta\varphi\,\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}} &= \left\{-\pi\mathbf{k}\frac{\partial \bar f_a}{\partial \mathbf{p}_a}(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} - \frac{8\pi^2\varepsilon''}{k^2|\varepsilon|^2}\bar f_a\right\} e_a\delta(\omega - \mathbf{k}v_a) = \\ &= -\frac{32\pi e_a}{k^4|\varepsilon_l|^2}\sum_b e_b^2 \int \mathbf{k}\left\{\frac{\partial \bar f_a}{\partial \mathbf{p}_a}\bar f_b - \bar f_a\frac{\partial \bar f_b}{\partial \mathbf{p}_b}\right\}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_b)\, d^3p_b \cdot \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_a).\end{aligned}$$

Подставив это выражение в (51,30), легко приводим (51,29) к виду интеграла столкновений Балеску—Ленарда (§ 47).

---

[1]) Самосогласованное поле в плазме—макроскопическая величина, и поэтому к нему применима макроскопическая теория флуктуаций. Функция же распределения—не макроскопическая величина, и ее флуктуации всегда требуют кинетического рассмотрения.

[2]) Это выражение получается из IX, (75,20), если разделить последнее на поперечную и продольную части и заменить ε в этих частях соответственно на $\varepsilon_t(\omega, k)$ и $\varepsilon_l(\omega, k)$.

В связи с приведенным выводом может показаться странным, что для вычисления интеграла столкновений оказалось достаточным рассматривать флуктуации в бесстолкновительной плазме. Это, однако, связано с тем, что при столкновениях в плазме существенны компоненты Фурье электрического поля с $k \gtrsim 1/a \gg 1/l$, что и позволяет пренебречь столкновениями. Ситуация здесь вполне аналогична той, которая имела место при выводе кинетического уравнения Больцмана в § 16. Действительно, уравнение (16,10) как раз и означает пренебрежение влиянием столкновений на парную корреляционную функцию.