ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 52. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной холодной плазмы

Эта глава посвящена изучению свойств плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле; такую плазму называют *магнитоактивной*. Заставляя заряженные частицы двигаться по спиральным траекториям вдоль силовых линий, магнитное поле оказывает глубокое влияние на поведение плазмы. Оно влияет, в частности, и на ее диэлектрические свойства.

Напомним предварительно некоторые общие свойства тензора диэлектрической проницаемости в присутствии магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}$ (см. VIII, § 82). Как и в отсутствие поля, имеет место равенство (28,6):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon^*_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}). \tag{52,1}$$

Согласно же принципу Онсагера, этот тензор симметричен при условии одновременного изменения знака поля:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{k}; -\mathbf{B}). \tag{52,2}$$

Подчеркнем, однако, что это свойство относится только к термодинамически равновесной среде—в отличие от свойства (52,1), являющегося следствием уже самого определения $\varepsilon_{\alpha\beta}$[1]).

В общем случае тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ может быть разделен на эрмитову, $(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon^*_{\beta\alpha})/2$, и антиэрмитову, $(\varepsilon_{\alpha\beta}-\varepsilon^*_{\beta\alpha})/2$, части. Последняя определяет диссипацию энергии поля в среде (ср. (30,3)).

Изучение магнитоактивной плазмы мы начнем с простейшего случая «холодной» бесстолкновительной плазмы. Температура такой плазмы предполагается настолько низкой, что тепловым движением частиц можно пренебречь (необходимые для этого условия сформулированы ниже). В этом приближении пространственная дисперсия отсутствует и диэлектрическая проницаемость зависит только от частоты электрического поля. Отсутствует

---

[1]) Подчеркнем также, что речь идет о проницаемости для переменного электрического поля. На статическую ($\omega = 0$) диэлектрическую проницаемость, являющуюся чисто термодинамической величиной, в рамках классической теории магнитное поле вообще не влияет (ср. V, § 52); конечные (при $\mathbf{k} \neq 0$) величины $\varepsilon_{\alpha\beta}(0, \mathbf{k}; \mathbf{B})$ совпадают с $\varepsilon_{\alpha\beta}(0, \mathbf{k}; 0)$.

также и диссипация, так что тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ эрмитов,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{B}) = \varepsilon^*_{\beta\alpha}(\omega;\ \mathbf{B}). \tag{52,3}$$

Вместе с равенством (52,1) отсюда следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(-\omega;\ \mathbf{B}). \tag{52,4}$$

Разделив эрмитов тензор на вещественную и мнимую части, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\alpha\beta} + i\varepsilon''_{\alpha\beta}$, в силу (52,2—3) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{B}) &= \varepsilon'_{\beta\alpha}(\omega;\ \mathbf{B}) = \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega;\ -\mathbf{B}), \\ \varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{B}) &= -\varepsilon''_{\beta\alpha}(\omega;\ \mathbf{B}) = -\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega;\ -\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{52,5}$$

Таким образом, в бездиссипативной среде $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ — четные, а $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ — нечетные функции поля.

Будем считать, что анизотропия плазмы связана только с присутствием постоянного однородного магнитного поля (индукцию которого внутри плазмы обозначим через $\mathbf{B}_0$). В таком случае общая линейная зависимость между индукцией и напряженностью слабого монохроматического электрического поля имеет вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\perp \mathbf{E} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\,\mathbf{b}\,(\mathbf{bE}) + ig\,[\mathbf{Eb}], \tag{52,6}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$, а $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, g — функции от ω и B_0. В тензорном виде это соотношение записывается как $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta$, где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp\delta_{\alpha\beta} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\,b_\alpha b_\beta + ige_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma. \tag{52,7}$$

Если выбрать ось z в направлении $\mathbf{B}_0$, то компоненты этого тензора будут

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_\perp, && \varepsilon_{zz} = \varepsilon_\parallel, \\ &\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = ig, && \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \tag{52,8}$$

Из условия эрмитовости тензора (52,7) следует, что функции $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, g вещественны, а из (52,4) следует, что $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ — четные, а g — нечетная функции частоты. Принцип Онсагера удовлетворяется выражением (52,7) автоматически.

В слабых полях тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ должен разлагаться по целым степеням вектора $\mathbf{B}_0$. Поэтому при $\mathbf{B}_0 \to 0$ коэффициент $\varepsilon_\perp$ стремится к конечному пределу — диэлектрической проницаемости в отсутствие магнитного поля. Разность же $\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel \sim B_0^2$, а коэффициент $g \sim B_0$.

Вычисление тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в рассматриваемом приближении может быть произведено непосредственно исходя из уравнений движения частиц в переменном поле $\mathbf{E}$ и постоянном $\mathbf{B}_0$ — подобно тому, как была выведена в § 31 формула (31,9). Так, для электронов имеем

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\,[\mathbf{vB}_0]. \tag{52,9}$$

Скорость $\mathbf{v}$ меняется со временем по тому же закону ($e^{-i\omega t}$), что и поле $\mathbf{E}$; пренебрегая пространственным изменением последнего в области движения частицы, имеем из (52,9)

$$i\omega\mathbf{v} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0].$$

Решение этого алгебраического векторного уравнения содержит члены, направленные вдоль $\mathbf{E}$, $\mathbf{b}$ и $[\mathbf{E}\mathbf{b}]$; подбирая соответствующим образом коэффициенты в этих членах, получим

$$\mathbf{v} = -\frac{ie\omega}{m(\omega^2-\omega_{Be}^2)}\left\{\mathbf{E} - \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2}\mathbf{b}(\mathbf{E}\mathbf{b}) - i\frac{\omega_{Be}}{\omega}[\mathbf{E}\mathbf{b}]\right\}, \qquad (52,10)$$

где $\omega_{Be} = eB_0/mc$. Вызванная движением электронов поляризация $\mathbf{P}$, а с нею и индукция $\mathbf{D}$, связаны с их скоростью соотношением (29,4):

$$-i\omega\mathbf{P} = -i\omega\frac{\mathbf{D}-\mathbf{E}}{4\pi} = \mathbf{j} = -eN_e\mathbf{v}.$$

Таким же образом вычисляется ионный вклад в поляризацию, причем оба вклада складываются. В результате находим

$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2-\omega_{Be}^2} - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2-\omega_{Bi}^2},$$
$$\varepsilon_\parallel = 1 - \frac{\Omega_e^2+\Omega_i^2}{\omega^2}, \qquad (52,11)$$
$$g = \frac{\omega_{Be}\Omega_e^2}{\omega(\omega^2-\omega_{Be}^2)} - \frac{\omega_{Bi}\Omega_i^2}{\omega(\omega^2-\omega_{Bi}^2)}.$$

Здесь

$$\omega_{Be} = \frac{eB_0}{mc}, \quad \omega_{Bi} = \frac{zeB_0}{Mc} \qquad (52,12)$$

— так называемые *ларморовы частоты* электронов и ионов[1]); значения этих параметров являются важной характеристикой магнитоактивной плазмы (напомним, что это — частота обращения заряженных частиц по круговым орбитам в магнитном поле).

Отношения

$$\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{Be}} = \frac{zm}{M}, \quad \frac{\Omega_i}{\Omega_e} = \left(\frac{zm}{M}\right)^{1/2} \qquad (52,13)$$

— малые величины. Что же касается отношения частот Ω_e и ω_{Be} (или Ω_i и ω_{Bi}), зависящих от совершенно различных параметров (от плотности плазмы и от поля B_0), то оно может меняться в очень широких пределах.

---

[1]) Их называют также *циклотронными* или *гиромагнитными*.

Отметим, что ионный вклад в диэлектрическую проницаемость магнитоактивной плазмы, несмотря на большую массу ионов, может быть (при достаточно малых частотах ω) сравним или даже превышать электронный вклад. При $\omega \to 0$ два члена в g взаимно сокращаются и $g \to 0$; в этом легко убедиться, заметив, что

$$\Omega_e^2/\omega_{Be} = \Omega_i^2/\omega_{Bi} \tag{52,14}$$

в силу электронейтральности плазмы ($N_e = zN_i$). Оба члена в g остаются одинакового порядка величины при $\omega \sim \omega_{Bi}$, а пренебрежение ионной частью в g возможно при $\omega \gg \omega_{Bi}$. В поперечной же проницаемости, $\varepsilon_\perp$, оба члена сравниваются лишь в области

$$\omega \sim \omega_{Bi}(M/m)^{1/2} \sim (\omega_{Bi}\omega_{Be})^{1/2}.$$

Пренебрежение ионным вкладом возможно здесь лишь при

$$\omega \gg (\omega_{Bi}\omega_{Be})^{1/2}. \tag{52,15}$$

Наконец, в продольной проницаемости $\varepsilon_\parallel$ (куда Ω_e^2 и Ω_i^2 входят в виде суммы) ионной частью можно пренебречь всегда. Отметим, кстати, что независимость $\varepsilon_\parallel$ от $\mathbf{B}_0$ — следствие того, что поле $\mathbf{E}$ рассматривалось как однородное: в скрещенных однородных полях магнитное поле не меняет движения частиц вдоль направления $\mathbf{B}_0$.

Остановимся, наконец, на условиях применимости полученных формул. Применив к движению частиц уравнение (52,9), мы пренебрегли пространственным изменением поля $\mathbf{E}$ в области локализации частицы. Размеры этой области в направлении постоянного поля $\mathbf{B}_0$ определяются расстоянием v_T/ω, проходимым частицей, движущейся со средней тепловой скоростью v_T за время изменения переменного поля. В направлениях же, перпендикулярных полю $\mathbf{B}_0$, эти размеры при $\omega < \omega_B$ определяются величиной

$$r_B \sim v_T/\omega_B \tag{52,16}$$

— радиусом круговых орбит частиц, движущихся со скоростью v_T в магнитном поле $\mathbf{B}_0$ (*ларморов радиус* частиц). Указанное выше пренебрежение требует малости этих расстояний по сравнению с расстояниями, на которых меняется (в соответствующих направлениях) поле $\mathbf{E}$:

$$v_T|k_z|/\omega \ll 1, \quad v_T k_\perp/\omega_B \ll 1, \tag{52,17}$$

где $k_z \equiv k_\parallel$ и $\mathbf{k}_\perp$ — составляющие волнового вектора вдоль и поперек поля $\mathbf{B}_0$. Эти неравенства должны выполняться для каждого рода частиц в плазме.

Мы увидим ниже, что, кроме того, частота ω не должна быть слишком близкой к какой-либо из частот ω_{Be}, ω_{Bi} или их кратным (условия (53,17)). Вблизи этих частот пространственная дисперсия должна учитываться даже при соблюдении условий (52,17). Как мы увидим в § 55, это устраняет полюсы, которые выражения (52,11) имеют при $\omega^2=\omega_{Be}^2$ или $\omega^2=\omega_{Bi}^2$.

§ 53. Функция распределения в магнитном поле

Тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной магнитоактивной плазмы с учетом пространственной дисперсии вычисляется по функциям распределения электронов и ионов, определяемым кинетическим уравнением.

Будем, для определенности, писать все формулы для электронов. Кинетические уравнения бесстолкновительной плазмы были написаны уже в § 27. Для электронов оно имеет вид[1])

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}-e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=0. \tag{53,1}$$

Пусть плазма находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ произвольной величины и слабом переменном электромагнитном поле, в котором

$$\mathbf{E},\ \mathbf{B}'\sim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{53,2}$$

При этом, в силу уравнений Максвелла,

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{B}'=[\mathbf{kE}]. \tag{53,3}$$

Подставим в (53,1) $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}'$, а функцию распределения представим в виде $f=f_0+\delta f$, где f_0—стационарное и однородное распределение в отсутствие переменного поля; малая добавка δf зависит от t и $\mathbf{r}$ по тому же закону (53,2), что и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}'$, которым она пропорциональна. Отделив в уравнении члены нулевого и первого порядков по слабому полю, получим[2])

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}[\mathbf{vB}_0]=0, \tag{53,4}$$

$$i(\mathbf{kv}-\omega)\,\delta f-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}_0]\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}}=e\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{kE}]]\right\}. \tag{53,5}$$

Обозначим посредством v_z, k_z составляющие векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ вдоль поля $\mathbf{B}_0$, а посредством $\mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{k}_\perp$—составляющие в перпен-

---

[1]) Строго говоря, в присутствии магнитного поля фазовое пространство частицы должно определяться как пространство $\mathbf{r},\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}=\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t,\mathbf{r})/c$ — обобщенный импульс. Но $d^3x\,d^3P=d^3x\,d^3p$, так как добавление $\mathbf{A}$ только меняет начало отсчета импульса в каждой точке пространства. Поэтому можно относить функцию распределения по-прежнему к $d^3x\,d^3p$.

[2]) В холодной плазме лоренцеву силу со стороны слабого поля $\mathbf{B}'$ не надо было учитывать, так как при пренебрежении собственным (в отсутствие поля) движением частиц эта сила второго порядка малости.