должна учитываться даже при соблюдении условий (52,17). Как мы увидим в § 55, это устраняет полюсы, которые выражения (52,11) имеют при $\omega^2=\omega_{Be}^2$ или $\omega^2=\omega_{Bi}^2$.

§ 53. Функция распределения в магнитном поле

Тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной магнитоактивной плазмы с учетом пространственной дисперсии вычисляется по функциям распределения электронов и ионов, определяемым кинетическим уравнением.

Будем, для определенности, писать все формулы для электронов. Кинетические уравнения бесстолкновительной плазмы были написаны уже в § 27. Для электронов оно имеет вид[1])

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}-e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=0. \tag{53,1}$$

Пусть плазма находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ произвольной величины и слабом переменном электромагнитном поле, в котором

$$\mathbf{E},\ \mathbf{B}'\sim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{53,2}$$

При этом, в силу уравнений Максвелла,

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{B}'=[\mathbf{kE}]. \tag{53,3}$$

Подставим в (53,1) $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}'$, а функцию распределения представим в виде $f=f_0+\delta f$, где f_0—стационарное и однородное распределение в отсутствие переменного поля; малая добавка δf зависит от t и $\mathbf{r}$ по тому же закону (53,2), что и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}'$, которым она пропорциональна. Отделив в уравнении члены нулевого и первого порядков по слабому полю, получим[2])

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}[\mathbf{vB}_0]=0, \tag{53,4}$$

$$i(\mathbf{kv}-\omega)\,\delta f-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}_0]\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}}=e\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{kE}]]\right\}. \tag{53,5}$$

Обозначим посредством v_z, k_z составляющие векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ вдоль поля $\mathbf{B}_0$, а посредством $\mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{k}_\perp$—составляющие в перпен-

---

[1]) Строго говоря, в присутствии магнитного поля фазовое пространство частицы должно определяться как пространство $\mathbf{r},\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}=\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t,\mathbf{r})/c$ — обобщенный импульс. Но $d^3x\,d^3P=d^3x\,d^3p$, так как добавление $\mathbf{A}$ только меняет начало отсчета импульса в каждой точке пространства. Поэтому можно относить функцию распределения по-прежнему к $d^3x\,d^3p$.

[2]) В холодной плазме лоренцеву силу со стороны слабого поля $\mathbf{B}'$ не надо было учитывать, так как при пренебрежении собственным (в отсутствие поля) движением частиц эта сила второго порядка малости.

дикулярной $\mathbf{B}_0$ плоскости; пусть φ — угол между $\mathbf{v}_\perp$ и плоскостью $\mathbf{k}_\perp$, $\mathbf{B}_0$ (отсчитываемый в направлении вращения буравчика, ввинчиваемого вдоль вектора $\mathbf{B}_0$); переменные v_z, $v_\perp$, φ составляют цилиндрические координаты в $\mathbf{v}$-пространстве. В этих переменных уравнение (53,5) принимает вид

$$i(k_z v_z + k_\perp v_\perp \cos\varphi - \omega)\,\delta f + \omega_{Be}\frac{\partial\,\delta f}{\partial\varphi} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{kE}]]\right\}\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}}. \quad (53,6)$$

Из уравнения же (53,4) следует, что $\partial f_0/\partial\varphi = 0$, т. е. f_0 может быть любой функцией, зависящей только от p_z и $p_\perp$:

$$f_0 = f_0(p_z,\ p_\perp) \quad (53,7)$$

(этот результат заранее очевиден для бесстолкновительной плазмы, поскольку p_z и $p_\perp$ — те переменные, на которые не влияет магнитное поле).

Для упрощения записи формул введем обозначения

$$\alpha = \frac{k_z v_z - \omega}{\omega_{Be}}, \quad \beta = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}}, \quad (53,8)$$

$$Q(v_z,\ v_\perp,\ \varphi) = \frac{e}{\omega_{Be}}\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{kE}]]\right\}. \quad (53,9)$$

Если f_0 зависит только от энергии электронов $\varepsilon = p^2/2m$, то производная $\partial f_0/\partial\mathbf{p} = \mathbf{v}\,df_0/d\varepsilon$ и ее произведение со вторым членом в скобках обращается в нуль, так что

$$Q = \frac{e}{\omega_{Be}}\frac{df_0}{d\varepsilon}\mathbf{vE}. \quad (53,10)$$

С этими обозначениями уравнение (53,6) примет вид

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial\varphi} + i(\alpha + \beta\cos\varphi) = Q(\varphi) \quad (53,11)$$

(аргументы v_z, $v_\perp$ в функции Q не выписываем). Его решение:

$$\delta f = e^{-i(\alpha\varphi + \beta\sin\varphi)}\int_C^{\varphi} e^{i(\alpha\varphi' + \beta\sin\varphi')}\,Q(\varphi')\,d\varphi',$$

или, после замены переменной интегрирования $\varphi' = \varphi - \tau$,

$$\delta f = e^{-i\beta\sin\varphi}\int_0^{C-\varphi} e^{i\beta\sin(\varphi-\tau) - i\alpha\tau}\,Q(\varphi-\tau)\,d\tau.$$

Постоянная C определяется требованием, чтобы функция δf была периодична по φ с периодом 2π. Поскольку подынтегральная функция (как и множитель перед интегралом) периодична по φ, то поставленное требование удовлетворится, если пределы интегрирования не будут зависеть от φ; для этого надо положить $C=\infty$ или $C=-\infty$. Выбор между этими двумя возможностями определяется правилом обхода Ландау (29,6): интегрирование должно производиться при $\omega\to\omega+i0$, т. е. $\alpha\to\alpha-i0$; такой интеграл сходится лишь при $C=\infty$[1]). Окончательно имеем

$$\delta f=e^{-i\beta\sin\varphi}\int_0^\infty e^{i\beta\sin(\varphi-\tau)-i\alpha\tau}Q(\varphi-\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^\infty \exp\left\{-i\alpha\tau-2i\beta\cos\left(\varphi-\frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{\tau}{2}\right\}Q(\varphi-\tau)\,d\tau. \qquad (53,12)$$

В пределе $B_0\to 0$ это выражение должно переходить в (29,2). Для выполнения предельного перехода замечаем, что при $\alpha\gg 1$ в интеграле существенна область $\tau\ll 1$. Тогда $\sin(\varphi-\tau)\approx\sin\varphi-\tau\cos\varphi$ и интеграл принимает вид

$$\delta f=Q(\varphi)\int_0^\infty e^{-i(\alpha+\beta)\tau}\,d\tau=Q(\varphi)\int_0^\infty \exp\left\{-i\tau\frac{\mathbf{kv}-\omega}{\omega_{Be}}\right\}d\tau.$$

Взяв интеграл при $\omega\to\omega+i0$, получим

$$\delta f=\frac{Q\omega_{Be}}{i(\mathbf{kv}-\omega)}, \qquad (53,13)$$

что и требовалось.

Если частота поля совпадает с ларморовой частотой ω_{Be} или кратна ей, то говорят о *простом* или *кратном циклотронном резонансе* (электронов). Для исследования диэлектрических свойств плазмы вблизи таких резонансов удобен другой способ решения уравнения (53,11), основанный на разложении искомой функции в ряд Фурье по переменной φ.

Произведя в (53,11) замену

$$\delta f=e^{-i\beta\sin\varphi}g, \qquad (53,14)$$

получим для функции g уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}+i\alpha g=e^{i\beta\sin\varphi}Q(v_z,\ v_\perp,\ \varphi).$$

Его решение ищем в виде ряда Фурье

$$g=\sum_{s=-\infty}^{\infty}e^{is\varphi}g_s(v_z,\ v_\perp) \qquad (53,15)$$

[1]) Этот вывод зависит от знака, с которым ω входит в показатель степени. В случае ионов заряд $-e$ заменяется на ze, так что $\omega_{Be}\to-\omega_{Bi}$. Тогда при $\omega\to\omega+i0$ было бы $\alpha\to\alpha+i0$ и для C надо было бы выбрать значение $-\infty$.

и для коэффициентов g_s находим

$$g_s = Q_s/i(\alpha+s), \tag{53,16}$$

$$Q_s(v_z, v_\perp) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\beta \sin\tau - s\tau)} Q(v_z, v_\perp, \tau)\, d\tau.$$

Разложение (53,15) автоматически обеспечивает периодичность функции δf по φ.

Отметим прежде всего, что выражение δf в виде ряда (53,14—15) позволяет сразу сформулировать условия допустимости пренебрежения пространственной дисперсией. Волновой вектор входит в члены ряда через параметры

$$\beta = k_\perp v_\perp/\omega_B, \quad \alpha + s = -(\omega - s\omega_B - k_z v_z)/\omega_B.$$

Диэлектрическая проницаемость плазмы определяется функцией распределения при скоростях $v \sim v_T$. Волновой вектор выпадает из этой функции, если

$$k_\perp v_\perp \ll \omega_B, \quad |\omega - s\omega_B| \gg |k_z| v_T. \tag{53,17}$$

Первое из неравенств (53,17) и второе с $s=0$ совпадают с условиями (52,17). Мы видим, что помимо этих условий требуется еще, чтобы частота ω не лежала слишком близко к какому-либо из циклотронных резонансов.

В окрестности циклотронных резонансов функция распределения может выражаться, при выполнении определенных условий, всего одним членом ряда Фурье. Именно, должно быть

$$|k_z| v_T \ll \omega_B, \quad |\omega - n\omega_B| \ll \omega_B, \tag{53,18}$$

где n — какое-либо из чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Легко видеть, что при этом n-й член в разложении (53,15) велик по сравнению с остальными. Действительно,

$$g_n \sim \frac{Q_n \omega_B}{|k_z v_T| + |\omega - n\omega_B|} \gg Q_n,$$

между тем как для $s \neq n$ будет $g_s \lesssim Q_s$ (так как $|s\omega_B - \omega| \gtrsim \omega_B$). Ограничившись этим одним членом, получим для функции распределения электронов:

$$\delta f = Q_n \frac{\omega_{Be} \exp\left[i\left(n\varphi - \dfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}} \sin\varphi\right)\right]}{i\left[k_z v_z - (\omega - n\omega_{Be})\right]},$$

$$Q_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[-i\left(n\tau - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}}\sin\tau\right)\right] Q(v_z, v_\perp, \tau)\, d\tau. \tag{53,19}$$

Зависимость функции распределения от угла φ этой формулой определяется в явном виде. В частности, при $n=0$ и $k_\perp \to 0$ распределение вообще не зависит от φ. Происхождение этого свойства очевидно из условия $\omega \ll \omega_{Be}$ ((53,18) с $n=0$): частота ларморова вращения велика по сравнению с частотой изменения поля, что и приводит к «усреднению» функции распределения по углу вращения[1]).

§ 54. Диэлектрическая проницаемость магнитоактивной максвелловской плазмы

Электронный вклад в тензор диэлектрической проницаемости вычисляется по функции распределения согласно формуле

$$P_\alpha = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}}{4\pi} E_\beta = \frac{e}{i\omega} \int v_\alpha \delta f \, d^3p \qquad (54,1)$$

(и аналогично, с заменой $e \to -ze$ — ионный вклад). Для максвелловской плазмы интегрирование по d^3p в этом выражении может быть выполнено в явном виде.

Функция δf дается интегралом (53,12), причем согласно определению (53,10):

$$Q = -\frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}}{\omega_{Be} T} f_0. \qquad (54,2)$$

Перепишем этот интеграл в более компактном виде, введя вместо векторов $\mathbf{k} = (k_z, \mathbf{k}_\perp)$ и $\mathbf{E} = (E_z, \mathbf{E}_\perp)$ векторы

$$\mathbf{K} = \left(k_z\tau, \ 2\tilde{\mathbf{k}}_\perp \sin\frac{\tau}{2}\right), \quad \tilde{\mathbf{E}} = (E_z, \tilde{\mathbf{E}}_\perp), \qquad (54,3)$$

где $\tilde{\mathbf{k}}_\perp$ — вектор $\mathbf{k}_\perp$, повернутый на угол $\tau/2$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}_0$), а $\tilde{\mathbf{E}}_\perp$ — вектор $\mathbf{E}_\perp$, повернутый на угол τ. Тогда δf примет вид

$$\delta f = -\frac{e}{T\omega_{Be}} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{i}{\omega_{Be}}(\omega\tau - \mathbf{K}\mathbf{v})\right\} f_0(p) (\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{v}) \, d\tau,$$

где $f_0(p)$ — максвелловская функция распределения.

Это выражение подставим в (54,1) и заменим переменную интегрирования $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ согласно

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - i\mathbf{K}T/m\omega_{Be}.$$

[1]) Соответствующие рассуждения изложены более подробно по аналогичному поводу в § 1.