в силу требования инвариантности по отношению к инверсии координат, компоненты ε_{xz} и ε_{yz} (содержащие индекс z один раз) должны быть нечетными, а все остальные компоненты — четными функциями $\mathbf{B}_0$. Отсюда и из (54,8) следует (54,7).

Отметим, что ввиду соотношений (54,7) эрмитовы и антиэрмитовы части различных компонент $\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon'_{\alpha\beta}+i\varepsilon''_{\alpha\beta}$ выражаются по-разному через их вещественную и мнимую части. Именно, разбиение на эрмитову и антиэрмитову части дается следующей суммой:

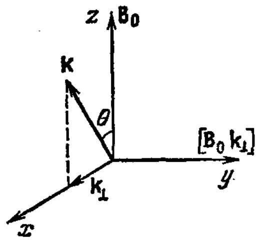

Рис. 15.

$$(\varepsilon_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} \varepsilon'_{xx} & i\varepsilon''_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ -i\varepsilon''_{xy} & \varepsilon'_{yy} & i\varepsilon''_{yz} \\ \varepsilon'_{xz} & -i\varepsilon''_{yz} & \varepsilon'_{zz} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} i\varepsilon''_{xx} & \varepsilon'_{xy} & i\varepsilon''_{xz} \\ -\varepsilon'_{xy} & i\varepsilon''_{yy} & \varepsilon'_{yz} \\ i\varepsilon''_{xz} & -\varepsilon'_{yz} & i\varepsilon''_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (54,9)$$

Хотя мы производили все вычисления для электронной части проницаемости, но вполне аналогичные формулы справедливы и и для ионного вклада. Переход к случаю ионов совершается заменой Ω_e, $v_{Te}\to\Omega_i$, v_{Ti}; $\omega_{Be}\to-\omega_{Bi}$ и одновременной заменой верхнего предела интеграла в (54,5) на $-\infty$ (см. примечание на стр. 270). Заменив затем переменную интегрирования $\tau\to-\tau$, мы вернемся к прежним выражениям (54,5—6) с Ω_i, v_{Ti}, ω_{Bi} вместо Ω_e, v_{Te}, ω_{Be} и с тем лишь отличием, что изменится знак $\varkappa_{xy}$ и $\varkappa_{yz}$. Таким образом, правило перехода от электронного к ионному вкладу в проницаемость состоит в замене электронных параметров ионными с одновременным изменением знака компонент ε_{xy} и ε_{yz}.

§ 55. Затухание Ландау в магнитоактивной плазме

Учет теплового движения частиц плазмы приводит к появлению у тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ антиэрмитовой части. В бесстолкновительной плазме, ввиду отсутствия истинной диссипации энергии, эта часть тензора связана с затуханием Ландау.

Мы видели в § 30, что механизм затухания Ландау связан с передачей энергии электромагнитного поля частицам, движущимся в фазе с волной: в затухании участвуют частицы, для которых $\omega=\mathbf{kv}$, т. е. проекция скорости $\mathbf{v}$ на направление $\mathbf{k}$ совпадает с фазовой скоростью волны ω/k. В магнитоактивной плазме это условие несколько меняется: должны совпадать проекции скорости частицы и фазовой скорости волны на направление постоянного поля $\mathbf{B}_0$:

$$v_z k_z=\omega. \qquad (55,1)$$

Действительно, поперечное по отношению к $\mathbf{B}_0$ движение частицы происходит по круговым траекториям и не может сопровождаться систематической передачей энергии от поля к частице: если на одной части круговой траектории частица движется в фазе с волной и получает от нее энергию, то на противоположной части траектории такая же энергия будет отдана частицей полю.

В магнитоактивной плазме, однако, существует еще и другой механизм бесстолкновительной диссипации, связанный именно с ларморовым вращением частиц. В системе координат, движущейся вдоль поля $\mathbf{B}_0$ вместе с частицей (со скоростью v_z), последняя движется по круговой орбите с частотой ω_B. Такая частица представляет собой, в электродинамическом отношении, осциллятор, излучающий на частоте ω_B (магнитотормозное излучение). Напротив, будучи помещен в переменное внешнее поле, осциллятор поглощает на этой же частоте. Частота электромагнитной волны в движущейся (относительно плазмы) системе координат, измененная эффектом Допплера, равна $\omega' = \omega - k_z v_z$. Поэтому в указанном поглощении будут принимать участие частицы, для которых

$$\omega - k_z v_z = \omega_B.$$

Если $\mathbf{k}_\perp = 0$, то поле волны однородно в поперечных (к $\mathbf{B}_0$) направлениях, т. е. действующая на осциллятор вынуждающая сила не зависит от его координат. Именно в таких условиях осциллятор поглощает только на своей частоте ω_B. Если же $\mathbf{k}_\perp \neq 0$, то вынуждающая сила зависит от координат осциллятора, в результате чего появляется поглощение также и на кратных частотах, т. е. при условиях

$$\omega - k_z v_z = n\omega_B, \tag{55,2}$$

где n — любое (положительное или отрицательное) целое число. Описанный механизм диссипации называют *циклотронным затуханием Ландау*; в зависимости от значения n говорят о затухании на простом ($n = \pm 1$) или кратном циклотронном резонансе.

Таким образом, значительное затухание может иметь место в областях частот, в которых

$$|\omega - n\omega_B| \leqslant |k_z| v_T, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{55,3}$$

(значение $n = 0$ отвечает условию (55,1)). Эти линии резонансного поглощения существуют как на электронных, так и на ионных частотах ω_{Be} и ω_{Bi}.

С математической точки зрения условиям (55,1—2) отвечают полюсы, которые в этих точках имеют различные члены разложения функции распределения в ряд Фурье (53,14—16). Антиэрмитовы части тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ возникают от вычетов при обходе этих полюсов в интеграле (54,1) по правилу Ландау. Переход к пределу $B_0 \to 0$ имеет математически своеобразный характер. В магнитном поле «полюсные» значения v_z (при заданном k_z) образуют дискретную последовательность, определяемую уравнением (55,2). По мере уменьшения поля полюсы сближаются и в пределе $B_0 = 0$ полюсные значения v_z зависят уже не от дискретного номера n, а от непрерывного параметра $\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp$, в соответствии с условием

$$\omega = \mathbf{kv} = k_z v_z + \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp$$

(как это показано при переходе от (53,12) к (53,13)).

Вычислим, для примера, тензор диэлектрической проницаемости в области простого ($n = 1$) циклотронного резонанса электронов. Будем считать также, что

$$|k_z| v_{Te}/\omega_{Be} \ll 1, \quad k_\perp v_{Te}/\omega_{Be} \ll 1. \tag{55,4}$$

Тогда можно воспользоваться для функции распределения всего одним членом ряда Фурье — выражением (53,19), соответствующим данному значению n. При этом, в силу второго условия (55,4), эта функция может быть разложена по степеням $k_\perp$. В случае $n = 1$ в таком разложении можно ограничиться нулевым членом — в соответствии с тем, что циклотронное поглощение на частоте ω_{Be} не требует неоднородности внешнего поля в плоскости xy.

Таким образом, пишем функцию распределения в виде

$$\delta f = Q_1 \frac{\omega_{Be} e^{i\varphi}}{i\,[k_z v_z - (\omega - \omega_{Be})]}, \tag{55,5}$$

причем

$$Q_1 = -\frac{e f_0}{2\pi T \omega_{Be}} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}\mathbf{v} e^{-i\tau}\, d\tau.$$

Написав

$$\mathbf{Ev} = E_x v_\perp \cos\tau + E_y v_\perp \sin\tau + E_z v_z$$

и выполнив интегрирование, получим

$$Q_1 = -\frac{e v_\perp}{2T\omega_{Be}} f_0 (E_x - iE_y). \tag{55,6}$$

С этой функцией распределения вектор поляризации (54,1) имеет лишь x- и y-компоненты. После выполнения интегрирования по $v_\perp\, dv_\perp\, d\varphi$ они принимают вид

$$P_x = -iP_y =$$
$$= (E_x - iE_y) \frac{e^2 N_e}{2\omega m k_z} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m v_z^2}{2T}\right) \frac{dv_z}{v_z - (\omega - \omega_{Be})/k_z - i0 \operatorname{sign} k_z}.$$

Интеграл такого вида выражается через определенную согласно (31,3) функцию F. Окончательно находим для компонент диэлектрического тензора[1]):

$$\varepsilon_{xx}-1=\varepsilon_{yy}-1=i\varepsilon_{xy}=\frac{\Omega_e^2}{2\omega(\omega-\omega_{Be})}F\left(\frac{\omega-\omega_{Be}}{\sqrt{2}v_{Te}|k_z|}\right), \qquad (55,7)$$
$$\varepsilon_{zz}-1=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0.$$

Антиэрмитова часть этого тензора, описывающая затухание:

$$\varepsilon''_{xx}=\varepsilon''_{yy}=\varepsilon'_{xy}=\frac{\pi^{1/2}\Omega_e^2}{2^{3/2}\omega|k_z|v_{Te}}\exp\left\{-\frac{(\omega-\omega_{Be})^2}{2v_{Te}^2k_z^2}\right\}. \qquad (55,8)$$

Эрмитова же часть в непосредственной близости к точке $\omega=\omega_{Be}$ имеет вид

$$\varepsilon'_{xx}-1=\varepsilon'_{yy}-1=-\varepsilon''_{xy}=-\frac{\Omega_e^2(\omega-\omega_{Be})}{2\omega v_{Te}^2k_z^2}, \qquad (55,9)$$
$$|\omega-\omega_{Be}|/v_{Te}|k_z|\ll 1.$$

В самой этой точке она меняет знак, обращаясь в нуль. Мы видим здесь, каким образом учет пространственной дисперсии устраняет полюсы диэлектрической проницаемости холодной плазмы (52,11): разрывная зависимость, изображенная на рис. 16 пунктиром, заменяется непрерывной зависимостью, изображенной сплошной линией[2]).

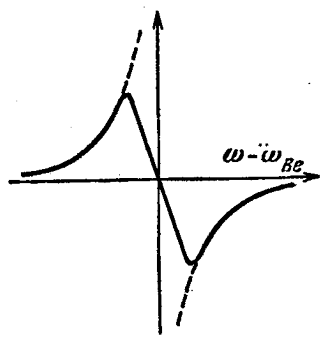

Рис. 16.

В пределе $|k_z|\to 0$ выражение (55,8) сводится к δ-функции:

$$\varepsilon''_{xx}=\varepsilon''_{yy}=\varepsilon'_{xy}\to\frac{\pi\Omega_e^2}{2\omega}\delta(\omega-\omega_{Be}) \qquad (55,10)$$

(действительно, при $\omega-\omega_{Be}\neq 0$ функция (55,8) обращается в пределе в нуль; в то же время интеграл этой функции по $d\omega$ равен $\pi\Omega_e^2/2\omega$ независимо от значения k_z). Этот результат вполне ясен: в отсутствие пространственной дисперсии ($k\to 0$) ширина линии поглощения обращается в нуль и затухание остается лишь при точном совпадении ω с ω_{Be}. Формулу (55,10) можно использовать вместо (55,8) в интегральных по ω выражениях.

---

[1]) Полюс $v_z=(\omega-\omega_{Be})/k_z$ обходится снизу или сверху в зависимости от знака k_z; это обстоятельство и приводит к появлению знака модуля у k_z в аргументе функции.

[2]) Выражение (55,7) не обладает, естественно, свойством (52,1). Это свойство появилось бы лишь при учете наряду с линией поглощения вблизи $\omega=\omega_{Be}$ также и линии вблизи частоты $\omega=-\omega_{Be}$.

Отметим, что формула (55,10) может быть получена и непосредственно из выражений (52,11) диэлектрической проницаемости холодной плазмы с помощью правила обхода Ландау. Согласно этому правилу, при наличии полюса по частоте ω последняя должна пониматься как $\omega+i0$. Поэтому фигурирующие в (52,11) полюсные множители надо в действительности понимать в следующем смысле:

$$\frac{1}{\omega^2-\omega_{Be}^2}\to\frac{1}{2\omega_{Be}}\left[\frac{1}{\omega-\omega_{Be}+i0}-\frac{1}{\omega+\omega_{Be}+i0}\right]$$

и по правилу (29,8):

$$\frac{1}{\omega^2-\omega_{Be}^2}\to\frac{1}{\omega^2-\omega_{Be}^2}-\frac{i\pi}{2\omega_{Be}}\left[\delta(\omega-\omega_{Be})-\delta(\omega+\omega_{Be})\right]. \quad (55,11)$$

Произведя в (52,11) такую замену, получим (55,10).

При $k_z=0$ (т. е. при $\mathbf{k}\perp\mathbf{B}_0$) затухание Ландау в магнитоактивной плазме отсутствует: скорость частиц выпадает из условий (55,1—2), и они не могут быть выполнены (кроме как при точном совпадении ω с каким-либо $n\omega_B$)[1]. Подчеркнем, что это свойство связано с нерелятивистским приближением; в релятивистской плазме затухание Ландау (циклотронное) может существовать и при $k_z=0$. Частота обращения вокруг направления $\mathbf{B}_0$ для релятивистской заряженной частицы с энергией ε равна

$$\omega_B\frac{mc^2}{\varepsilon}=\omega_B\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(с прежним определением ω_B). Это значение должно фигурировать в правой стороне условия (55,2) вместо ω_B. В частности, при $k_z=0$ будем иметь

$$\omega=n\omega_B\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad (55,12)$$

для возможности выполнения этого условия требуется лишь, чтобы было $\omega<n\omega_B$.

Затухание Ландау в магнитоактивной релятивистской плазме может существовать и в пределе $\mathbf{k}\to 0$ (в отличие не только от магнитоактивной нерелятивистской плазмы, но и от релятивистской плазмы в отсутствие магнитного поля). Оно осуществляется за счет частиц, находящихся в простом циклотронном резонансе с однородным переменным полем (условие (55,12) с $n=1$) и существует, следовательно, при частотах $\omega<\omega_B$ (см. задачу 2).

---

[1] В пределе $B_0\to 0$, разумеется, затухание появляется вновь — за счет электронов, удовлетворяющих условию $\omega=\mathbf{kv}\equiv\mathbf{k}_\perp\mathbf{v}_\perp$.

Задачи

1. Найти тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы при $\omega \lesssim |k_z| v_{Te}$; предполагаются выполненными также условия (55,4).

Решение. В нулевом приближении по малому параметру $k_\perp v_{Te}/\omega_{Be}$ функция распределения для этого случая (член $s=0$ ряда Фурье (53,14—15)):

$$\delta f = Q_0 \frac{\omega_{Be}}{i(k_z v_z - \omega)},$$

где

$$Q_0 = -\frac{ef_0}{\omega_{Be}T}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{E}\mathbf{v}\, d\tau = -\frac{ev_z E_z}{\omega_{Be}T} f_0.$$

С этой функцией δf вектор поляризации $\mathbf{P}$ имеет только z-компоненту, и из всех компонент тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}$ отлична от нуля лишь одна:

$$\varepsilon_{zz}-1 = \frac{4\pi e^2}{\omega T}\int \frac{f_0(p)\, v_z^2\, d^3p}{k_z v_z - \omega - i0}.$$

После тождественной замены

$$v_z^2 = \frac{1}{k_z}(k_z v_z - \omega)\, v_z + \frac{\omega}{k_z} v_z$$

интеграл от первого члена обращается в нуль (при интегрировании по dp_z); второй же член приводит к результату

$$\varepsilon_{zz}-1 = \frac{\Omega_e^2}{k_z^2 v_{Te}^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,|k_z|\, v_{Te}}\right)+1\right].$$

Мнимая часть этого выражения:

$$\varepsilon''_{zz} = \frac{\pi^{1/2}\omega\Omega_e^2}{2^{1/2}|k_z|^3 v_{Te}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right).$$

2. Найти антиэрмитову часть тензора диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской магнитоактивной электронной плазмы в пределе $\mathbf{k}\to 0$.

Решение. В релятивистском случае кинетическое уравнение (53,5) остается тем же, но при его преобразовании к виду (53,6) релятивистское соотношение $\mathbf{p}=\varepsilon\mathbf{v}/c^2$ (ε — энергия электрона) вместо $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ приводит к замене ω_{Be} на $\omega_{Be}mc^2/\varepsilon$; с этой заменой остаются справедливыми и все последующие формулы в § 53.

При $k=0$ затухание происходит только от простого циклотронного резонанса; поэтому для вычисления антиэрмитовой части $\varepsilon_{\alpha\beta}$ достаточно учесть лишь член $s=1$ в (53,14—15). Аналогично (55,5—6) найдем

$$\delta f = -\frac{iep_\perp c^2 e^{i\varphi} f_0}{2T\varepsilon(\omega-\omega_{Be}mc^2/\varepsilon)}(E_x - iE_y).$$

Ультрарелятивистская ($T \gg mc^2$) функция f_0[1]:

$$f_0 = \frac{N_e c^3}{8\pi T^3} e^{-\varepsilon/T}.$$

---

[1]) В этом выражении с ультрарелятивистской точностью написан нормировочный коэффициент; полагать $\varepsilon \approx cp$ еще нельзя ввиду дальнейшего интегрирования по p от 0 до ∞.

Вектор поляризации вычисляется как

$$\mathbf{P}=\frac{e}{i\omega}\int\frac{\mathbf{p}c^2}{\varepsilon}\,\delta f\,d^3p,$$

причем d^3p надо записать в виде $p^2\,dp\,do=p\varepsilon\,d\varepsilon\,do/c^2$. После выполнения интегрирования по do и замены $cp=(\varepsilon^2-m^2c^4)^{1/2}$ получается

$$\varepsilon_{xx}-1=\varepsilon_{yy}-1=i\varepsilon_{xy}=-\frac{\Omega_e^2mc^2}{12\omega^2T^4}\int\limits_{mc^2}^{\infty}\frac{(\varepsilon^2-m^2c^4)^{3/2}\,e^{-\varepsilon/T}\,d\varepsilon}{\varepsilon-\omega_{Be}mc^2/\omega+i0}.$$

Интеграл имеет мнимую часть, если полюс $\varepsilon=\omega_{Be}mc^2/\omega$ лежит в области интегрирования, т. е. если $\omega<\omega_{Be}$. В этом случае окончательно находим

$$\varepsilon''_{xx}=\varepsilon''_{yy}=\varepsilon'_{xy}=\frac{\pi\Omega_e^2\omega_{Be}^3}{12\omega^5}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mc^2\omega_{Be}}{\omega T}\right).$$

§ 56. Электромагнитные волны в магнитоактивной холодной плазме

Выведем общее уравнение, определяющее зависимость частоты от волнового вектора (или, как говорят, закон дисперсии) для свободных монохроматических волн, распространяющихся в среде с произвольным диэлектрическим тензором $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})$.

Для электромагнитного поля, зависящего от времени и координат по закону $\exp(-i\omega t+i\mathbf{kr})$, уравнения Максвелла (28,2) принимают вид[1])

$$[\mathbf{kE}]=\frac{\omega}{c}\mathbf{B},\qquad[\mathbf{kB}]=-\frac{\omega}{c}\mathbf{D},\tag{56,1}$$

$$\mathbf{kB}=0,\qquad\mathbf{kD}=0.\tag{56,2}$$

Подставив первую из формул (56,1) во вторую, получим

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}=-[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]=\mathbf{E}k^2-\mathbf{k}(\mathbf{kE}),$$

или, в компонентах,

$$E_\alpha k^2-k_\alpha k_\beta E_\beta=\frac{\omega^2}{c^2}D_\alpha=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta.\tag{56,3}$$

Условие совместности этой системы линейных однородных уравнений выражается равенством нулю определителя:

$$\left|k^2\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right|=0.\tag{56,4}$$

---

[1]) Не смешивать переменное магнитное поле волны $\mathbf{B}$ с постоянным полем $\mathbf{B}_0$!