Вектор поляризации вычисляется как

$$\mathbf{P} = \frac{e}{i\omega}\int \frac{\mathbf{p}c^2}{\varepsilon}\,\delta f\, d^3p,$$

причем d^3p надо записать в виде $p^2\,dp\,do = p\varepsilon\,d\varepsilon\,do/c^2$. После выполнения интегрирования по do и замены $cp = (\varepsilon^2 - m^2c^4)^{1/2}$ получается

$$\varepsilon_{xx} - 1 = \varepsilon_{yy} - 1 = i\varepsilon_{xy} = -\frac{\Omega_e^2 mc^2}{12\omega^2 T^4}\int\limits_{mc^2}^{\infty}\frac{(\varepsilon^2 - m^2c^4)^{3/2}\,e^{-\varepsilon/T}\,d\varepsilon}{\varepsilon - \omega_{Be}mc^2/\omega + i0}.$$

Интеграл имеет мнимую часть, если полюс $\varepsilon = \omega_{Be}mc^2/\omega$ лежит в области интегрирования, т. е. если $\omega < \omega_{Be}$. В этом случае окончательно находим

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} = \frac{\pi\Omega_e^2\omega_{Be}^3}{12\omega^5}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mc^2\omega_{Be}}{\omega T}\right).$$

§ 56. Электромагнитные волны в магнитоактивной холодной плазме

Выведем общее уравнение, определяющее зависимость частоты от волнового вектора (или, как говорят, закон дисперсии) для свободных монохроматических волн, распространяющихся в среде с произвольным диэлектрическим тензором $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$.

Для электромагнитного поля, зависящего от времени и координат по закону $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, уравнения Максвелла (28,2) принимают вид[1])

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad [\mathbf{kB}] = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D}, \tag{56,1}$$

$$\mathbf{kB} = 0, \qquad \mathbf{kD} = 0. \tag{56,2}$$

Подставив первую из формул (56,1) во вторую, получим

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = -[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]] = \mathbf{E}k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{kE}),$$

или, в компонентах,

$$E_\alpha k^2 - k_\alpha k_\beta E_\beta = \frac{\omega^2}{c^2}D_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta. \tag{56,3}$$

Условие совместности этой системы линейных однородных уравнений выражается равенством нулю определителя:

$$\left| k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right| = 0. \tag{56,4}$$

---

[1]) Не смешивать переменное магнитное поле волны $\mathbf{B}$ с постоянным полем $\mathbf{B}_0$!

Это и есть искомое *дисперсионное уравнение*[1]). При заданном (вещественном) $\mathbf{k}$ оно определяет частоты $\omega(\mathbf{k})$ (вообще говоря, комплексные), или, как говорят, спектр *собственных колебаний среды*. В общем случае наличия частотной и пространственной дисперсий уравнение (56,4) определяет бесконечное множество ветвей функции $\omega(\mathbf{k})$.

Рассмотрим электромагнитные волны в холодной магнитоактивной плазме с тензором диэлектрической проницаемости, даваемым формулами (52,7) и (52,11)[2]). Ввиду эрмитовости этого тензора заранее ясно, что определяемые уравнением (56,4) значения k^2c^2/ω^2 вещественны.

Поскольку в отсутствие пространственной дисперсии $\varepsilon_{\alpha\beta}$ зависят только от ω, то по отношению к $\mathbf{k}$ дисперсионное уравнение (56,4) — алгебраическое. Раскрыв определитель, получим после простого вычисления[3])

$$A\left(\frac{kc}{\omega}\right)^4+B\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2+C=0, \tag{56,5}$$

где

$$A=\frac{1}{k^2}\varepsilon_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta=\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_{\parallel}\cos^2\theta\equiv\varepsilon_l, \tag{56,6}$$

$$B=-\varepsilon_\perp\varepsilon_{\parallel}(1+\cos^2\theta)-(\varepsilon_\perp^2-g^2)\sin^2\theta, \tag{56,7}$$

$$C=\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_\perp^2-g^2) \tag{56,8}$$

(θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$). При заданных значениях ω и θ уравнение (56,5) дает два значения k^2, т. е. в плазме могут распространяться, вообще говоря, два типа волн[4]).

Рассмотрим сначала случаи распространения волн строго вдоль ($\theta=0$) и строго поперек ($\theta=\pi/2$) магнитного поля, представляющие специфические особенности.

При $\theta=0$ корни дисперсионного уравнения дают

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2=\varepsilon_\perp\pm g=1-\frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega\pm\omega_{Be})}-\frac{\Omega_i^2}{\omega(\omega\mp\omega_{Bi})}. \tag{56,9}$$

Из уравнений (56,3) легко видеть, что эти волны поперечны ($E_z=0$) и поляризованы по кругу ($E_y/E_x=\mp i$). Обращение вы-

[1]) В кристаллооптике его называют *уравнением Френеля*.

[2]) Электромагнитные волны в холодной магнитоактивной плазме были впервые исследованы, в пренебрежении ролью ионов, *Эпплтоном* (*E. V. Appleton*, 1928) и *Лассеном* (*H. Lassen*, 1927).

[3]) При вычислении целесообразно выбрать одну из координатных плоскостей (скажем, плоскость xz) проходящей через $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$.

[4]) Соответствующие им волны принято различать названиями *обыкновенной* и *необыкновенной*. Эти термины, однако, не имеют здесь того смысла, как в оптике одноосных кристаллов, — ни одна из этих волн не ведет себя как волна в изотропной среде.

ражений (56,9) в бесконечность при $\omega=\omega_{Be}$ или при $\omega=\omega_{Bi}$ отвечает резонансу — совпадению частоты и направления вращения вектора $\mathbf{E}$ с частотой и направлением ларморовского вращения электронов или ионов. На рис. 17 показан, для иллюстрации, примерный ход величины $n^2=(ck/\omega)^2$ как функции ω. При $\omega\to 0$ значения n^2 стремятся к предельному значению

$$1+\frac{\Omega_i^2}{\omega_{Bi}^2}=1+\frac{c^2}{u_A^2}$$

(пренебрежено ω_{Bi} по сравнению с ω_{Be}; u_A определено ниже формулой (56,18)). Распространению незатухающих волн отвечают, конечно, лишь те части кривых (показанные на рисунке сплошными линиями), на которых $n^2>0$.

При $\theta=0$ уравнение (56,5) удовлетворяется также и при $\varepsilon_{\parallel}=0$, что соответствует обычным продольным плазменным волнам с независящей от $\mathbf{k}$ частотой $\omega\approx\Omega_e$.

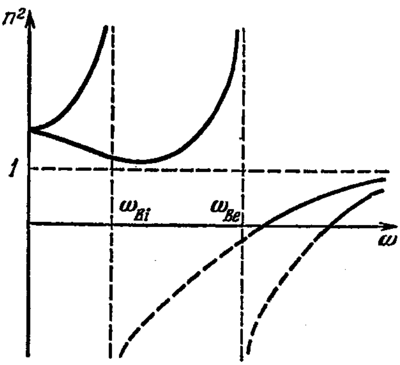

Рис. 17.

При $\theta=\pi/2$ два корня дисперсионного уравнения:

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2=\varepsilon_{\parallel},\qquad \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2=\varepsilon_{\perp}-\frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}}. \tag{56,10}$$

Первому отвечает волна с независящим от $\mathbf{B}_0$ законом дисперсии

$$\omega^2\approx c^2k^2+\Omega_e^2.$$

Эта волна поперечна ($\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$) и линейно поляризована причем $\mathbf{E}\parallel\mathbf{B}_0$. Второму корню (56,10) отвечает волна с полем $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}_0$, имеющим составляющие как продольную, так и поперечную по отношению к $\mathbf{k}$. Если частота настолько велика, что вкладом ионов в $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно пренебречь ($\omega\gg(\omega_{Be}\omega_{Bi})^{1/2}$ — условие (52,15)), то в этой волне[1])

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2=1-\frac{\Omega_e^2(\omega^2-\Omega_e^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{Be}^2-\Omega_e^2)}. \tag{56,11}$$

В общем случае произвольных углов θ (отличных от 0 или $\pi/2$) замечаем прежде всего, что для каждого значения существуют частоты, при которых коэффициент A в уравнении (56,5)

[1]) Колебания плазмы, в которых ионы не играют роли, принято вообще называть *высокочастотными*; колебания же, в которых влияние ионов существенно, называют *низкочастотными*.

обращается в нуль:

$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_\perp \sin^2\theta + \varepsilon_\parallel \cos^2\theta =$$
$$= 1 - \frac{\Omega_e^2 + \Omega_i^2}{\omega^2}\cos^2\theta - \left[\frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}\right]\sin^2\theta = 0. \quad (56,12)$$

Если для определяемых этим уравнением частот (так называемые *частоты плазменных резонансов*) выполняется также условие «медленности» $\omega \ll kc$, то согласно § 32 им отвечают продольные собственные колебания плазмы. В то же время обращение в нуль коэффициента при k^4 в квадратном (относительно k^2) уравнении (56,5) означает обращение одного из его корней в бесконечность; при $A \to 0$ эти корни равны $-C/B$ и $-B/A$.

Уравнение (56,12)—кубическое относительно ω^2 и имеет три вещественных корня. Их легко определить, использовав малость отношений Ω_i/Ω_e и ω_{Bi}/ω_{Be}. Два корня получаются при пренебрежении в (56,12) вкладом ионов и равны

$$\omega_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2}(\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2) \pm \frac{1}{2}\left[(\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\Omega_e^2\omega_{Be}^2\cos^2\theta\right]^{1/2}. \quad (56,13)$$

Учет ионов, однако, необходим в области $\omega \approx \omega_{Bi}$, в которой лежит третий корень; для этого корня легко получить выражение

$$\omega_3^2 \approx \omega_{Bi}^2\left(1 - z\frac{m}{M}\operatorname{tg}^2\theta\right) \quad (56,14)$$

(здесь предположено $\Omega_e \gg \omega_{Bi}$). Формулы (56,13) и (56,14) для $\omega_2(\theta)$ и $\omega_3(\theta)$ неприменимы при углах θ, настолько близких к $\pi/2$, что $\cos\theta \ll m/M$. В этой области

$$\omega_2^2 \equiv \omega_{2\text{г}}^2 = \frac{\omega_{Be}^2(\Omega_i^2 + \omega_{Bi}^2)}{\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2}, \quad \omega_3^2 = \frac{\Omega_e^2\omega_{Bi}^2\cos^2\theta}{\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2}. \quad (56,15)$$

Ролью ионов нельзя пренебречь не только для ω_3, но и для ω_2.

На рис. 18 изображен схематически характер зависимости частот ω_1, ω_2, ω_3 от угла θ[1]). Кривые $\omega_1(\theta)$ и $\omega_2(\theta)$ никогда не пересекаются друг с другом. Первая из них начинается (при $\theta = 0$) от большей, а вторая—от меньшей из частот Ω_e и ω_{Be}. При $\theta = \pi/2$ они достигают соответственно значений

$$\omega_{1\text{г}} = (\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2)^{1/2} \quad (56,16)$$

[1]) Сразу же отметим, что колебания с частотой ω_3 фактически существуют лишь именно в узком интервале углов вблизи $\pi/2$. В остальной же области углов эти колебания сильно затухают из-за циклотронного поглощения на простом ионном резонансе.

и $\omega_{2г}$. Частоты $\omega_{1г}$ и $\omega_{2г}$ называют соответственно *верхней* и *нижней гибридными* частотами. При $\Omega_e^2 \gg \omega_{Be}^2$ (а потому и заведомо $\Omega_i^2 \gg \omega_{Bi}^2$) вторая из них: $\omega_{2г} = (\omega_{Be}\omega_{Bi})^{1/2}$.

Положение частот ω_1, ω_2, ω_3 в значительной степени задает расположение различных ветвей спектра, определяемого дисперсионным уравнением (56,5). Как квадратное по $(ck/\omega)^2$ уравнение оно имеет при заданных ω и θ два корня. Проследив (при заданном θ) за изменением и обращением в бесконечность этих корней как функций ω, легко прийти к рис. 19, на котором схематически показан ход этих функций. Точки пересечения кривых с осью абсцисс определяются уравнением $C=0$, т. е. $\varepsilon_{\parallel}=0$ или $\varepsilon_{\perp}^2 = g^2$. Положение этих точек не зависит от угла θ; одна из них (корень уравнения $\varepsilon_{\parallel}=0$) есть всегда $\omega \approx \Omega_e$.

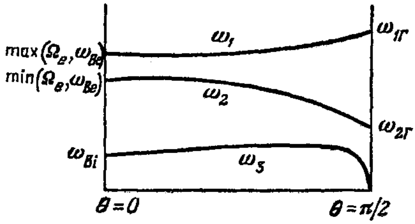

Рис. 18.

Спектр собственных колебаний холодной магнитоактивной плазмы содержит, таким образом, всего пять ветвей. Две из них (ветви I и II на рис. 19) достигают области низкочастотных колебаний; предельные (при $\omega \to 0$) значения фазовой скорости в этих ветвях равны

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)_{\rm I} = \frac{u_A|\cos\theta|}{(1+u_A^2/c^2)^{1/2}}, \qquad \left(\frac{\omega}{k}\right)_{\rm II} = \frac{u_A}{(1+u_A^2/c^2)^{1/2}}, \tag{56,17}$$

где

$$u_A = c\frac{\omega_{Bi}}{\Omega_i} = \frac{B_0}{(4\pi N_i M)^{1/2}}; \tag{56,18}$$

эту величину называют *альфвеновской скоростью*. Выражения (56,17) легко найти из уравнения (56,5), воспользовавшись предельными выражениями

$$\varepsilon_{\perp} \approx 1 + \frac{u_A^2}{c^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} \approx -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}, \quad g \sim O(\omega).$$

При $u_A \ll c$ фазовые скорости (56,17) равны соответственно $u_A|\cos\theta|$ и u_A. Эти предельные значения соответствуют волнам, которые существуют в холодной плазме согласно обычным уравнениям магнитной гидродинамики (см. VIII, § 52). Действительно, спектр магнитогидродинамических волн содержит три ветви. Во всех трех ветвях функция $\omega(\mathbf{k})$ линейна, но, вообще говоря, зависит от направления $\mathbf{k}$:

$$(\omega/k)_A^2 = u_A^2\cos^2\theta,$$
$$(\omega/k)_Б^2 = \frac{1}{2}\{u_s^2+u_A^2+[(u_s^2+u_A^2)^2-4u_s^2u_A^2\cos^2\theta]^{1/2}\}, \quad (56,19)$$
$$(\omega/k)_М^2 = \frac{1}{2}\{u_s^2+u_A^2-[(u_s^2+u_A^2)^2-4u_s^2u_A^2\cos^2\theta]^{1/2}\}$$

(u_s — скорость звука, формально вычисленная по адиабатической сжимаемости среды). Фазовая скорость первой из этих ветвей (их называют *альфвеновскими волнами*) прямо совпадает с предельным значением скорости первой из ветвей (56,17). Для того чтобы перейти к холодной плазме во второй формуле, следует положить в ней $u_s=0$ (поскольку в газе $u_s\sim(T/M)^{1/2}$). При этом $(\omega/k)_Б$ (соответствующие волны называют *быстрыми магнитозвуковыми*) совпадает с предельным значением $(\omega/k)_{II}$. Что касается третьей ветви, $(\omega/k)_М$ (она называется *медленной магнитозвуковой* волной), то ее скорость обращается в нуль при $u_s\to 0$ и потому она в холодной плазме отсутствует. Отметим, что предположение о холодности плазмы позволяет пренебрегать тепловым разбросом скоростей ионов и описывать их гидродинамически даже в отсутствие столкновений. Условие $u_A\ll c$ оправдывает пренебрежение токами смещения в уравнениях магнитной гидродинамики.

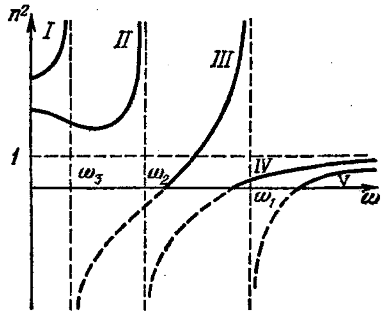

Рис. 19.

В обратном случае больших частот фазовые скорости двух ветвей (IV и V) стремятся к значениям $\omega/k=c$, отвечающим поперечным высокочастотным волнам в изотропной плазме,— как и должно было быть, поскольку при $\omega\gg\omega_{Be}$ магнитное поле не играет роли.

Наконец, остановимся на интересном случае волн, которые могут иметь место при $\Omega_e\gg\omega_{Be}$; при этом резонансная частота $\omega_2\approx\omega_{Be}\cos\theta$. Рассмотрим в этом случае область частот, промежуточных (на ветви II) между ω_2 и $\omega_3\approx\omega_{Bi}$, определяемую неравенствами

$$\omega_{Bi}\ll\omega\ll\omega_{Be}\cos\theta, \quad \omega\ll\Omega_e^2/\omega_{Be}. \quad (56,20)$$

Условие $\omega\gg\omega_{Bi}$ позволяет пренебречь в g вкладом ионов, а в силу условия $\omega\ll\omega_{Be}$ будет

$$\varepsilon_{xy}=ig=-i\frac{\Omega_e^2}{\omega\omega_{Be}}. \quad (56,21)$$

При условиях (56,20) будет также $\varepsilon_{\parallel}\gg g\gg\varepsilon_{\perp}$.

Искомое решение дисперсионного уравнения получается более прямым образом, если записать последнее в виде

$$\left| k^2\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma \varepsilon^{-1}_{\gamma\beta} - \frac{\omega^2}{c^2}\delta_{\alpha\beta} \right| = 0, \tag{56,22}$$

перейдя в (56,4) от тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ к его обратному (т. е. выразив в уравнениях (57,3) **E** через **D**). Компоненты обратного тензора:

$$\varepsilon^{-1}_{xx} = \varepsilon^{-1}_{yy} \approx -\varepsilon_\perp/g^2, \quad \varepsilon^{-1}_{zz} = 1/\varepsilon_{\|}, \quad \varepsilon^{-1}_{xy} = -\varepsilon^{-1}_{yx} \approx i/g,$$

и наибольшей из них будет ε^{-1}_{xy}. Пренебрегая остальными компонентами (и выбрав плоскость xz проходящей через $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$), получим дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} -\omega^2/c^2 & ik_z^2/g \\ -ik^2/g & -\omega^2/c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\omega = k^2c^2\frac{\omega_{Be}}{\Omega_e^2}|\cos\theta| = \frac{cB_0|\cos\theta|}{4\pi e N_e}k^2. \tag{56,23}$$

Эти волны называют *геликоидальными* [1]; они имеют чисто электронное происхождение.

Название этих волн связано с характером их поляризации. Из равенства $\mathbf{kD} = 0$ (56,2) при сделанном выборе координатных осей имеем

$$D_x\sin\theta + D_z\cos\theta = 0. \tag{56,24}$$

Из уравнений же (56,3), написанных в виде

$$[k^2\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma \varepsilon^{-1}_{\gamma\beta}]D_\beta = \frac{\omega^2}{c^2}D_\alpha, \tag{56,25}$$

находим $D_x = -i|\cos\theta|D_y$. В том же приближении (т. е. при сохранении из всех $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ лишь ε^{-1}_{xy}) электрическое поле волны лежит целиком в плоскости xy, перпендикулярной $\mathbf{B}_0$: $E_z = \varepsilon^{-1}_{z\beta}D_\beta = 0$. Компоненты же

$$E_x = \varepsilon^{-1}_{xy}D_y, \quad E_y = \varepsilon^{-1}_{yx}D_x = -\varepsilon^{-1}_{xy}D_x,$$

и из (56,24) следует

$$E_y = i|\cos\theta|E_x. \tag{56,26}$$

Таким образом, волна эллиптически поляризована в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}_0$; при $\theta = \pi/2$ поляризация становится линейной. В системе же координат $\xi y\zeta$, с осью ζ вдоль $\mathbf{k}$, имеем

$$E_\xi = -i\frac{|\cos\theta|}{\cos\theta}E_y, \quad E_\zeta = E_\xi \operatorname{tg}\theta. \tag{56,27}$$

[1] В геофизических применениях их называют *свистящими атмосфериками*.

Вектор **E** вращается вокруг направления **k**, описывая круговой конус.

Отметим, что выражение (56,21) для ε_{xy} имеет простой физический смысл. При $\omega_{Be} \gg \omega$ (вместе с подразумевающимся везде условием (52,17) $k_\perp v_{Te}/\omega_{Be} = k_\perp r_{Be} \ll 1$) можно считать, что поперечное (по отношению к $\mathbf{B}_0$) движение электронов происходит в постоянном и однородном поле **E**. Но при движении заряда в постоянных и однородных скрещенных полях **E** и $\mathbf{B}_0$ его средняя поперечная скорость (скорость электрического дрейфа) есть

$$\overline{\mathbf{v}}_\perp = c\,[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]/B_0^2 \tag{56,28}$$

(см. II, § 22). Именно этой скорости и отвечает выражение (56,21). Таким образом, геликоидальные волны связаны с электрическим дрейфом электронов в плазме.

§ 57. Влияние теплового движения на распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

При учете теплового движения частиц дисперсионное уравнение становится, вообще говоря, трансцендентным и приводит к бесчисленному множеству ветвей функции $\omega(\mathbf{k})$. Подавляющее большинство этих колебаний, однако, сильно затухает. Лишь в исключительных случаях затухание оказывается слабым и колебания могут распространяться в виде волн. К этим случаям относятся, прежде всего, рассмотренные в предыдущем параграфе волны, для которых тепловое движение приводит (при соблюдении условий (52,17) и (53,17)) лишь к малым поправкам в законе дисперсии и к малому коэффициенту затухания Ландау.

Мы видели, однако, что для волн в холодной плазме существуют области частот, в которых отношение kc/ω становится сколь угодно большим (окрестности плазменных резонансов). Но при $k \to \infty$ условия (52,17) заведомо нарушаются, так что учет теплового движения становится необходимым. Покажем теперь, что учет теплового движения уже как малой поправки в диэлектрической проницаемости устраняет расходимость корней дисперсионного уравнения и приводит к некоторым качественно новым свойствам спектра колебаний плазмы (*Б. Н. Гершман*, 1956). При этом, как мы увидим, все еще могут быть выполнены условия, обеспечивающие экспоненциальную малость затухания Ландау, так что антиэрмитовой частью $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно по-прежнему пренебречь. Будем для определенности говорить об окрестности высокочастотных плазменных резонансов, где достаточно учесть тепловое движение лишь электронов.