Вектор **E** вращается вокруг направления **k**, описывая круговой конус.

Отметим, что выражение (56,21) для ε_{xy} имеет простой физический смысл. При $\omega_{Be} \gg \omega$ (вместе с подразумевающимся везде условием (52,17) $k_\perp v_{Te}/\omega_{Be} = k_\perp r_{Be} \ll 1$) можно считать, что поперечное (по отношению к $\mathbf{B}_0$) движение электронов происходит в постоянном и однородном поле **E**. Но при движении заряда в постоянных и однородных скрещенных полях **E** и $\mathbf{B}_0$ его средняя поперечная скорость (скорость электрического дрейфа) есть

$$\bar{\mathbf{v}}_\perp = c[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]/B_0^2 \tag{56,28}$$

(см. II, § 22). Именно этой скорости и отвечает выражение (56,21). Таким образом, геликоидальные волны связаны с электрическим дрейфом электронов в плазме.

§ 57. Влияние теплового движения на распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

При учете теплового движения частиц дисперсионное уравнение становится, вообще говоря, трансцендентным и приводит к бесчисленному множеству ветвей функции $\omega(\mathbf{k})$. Подавляющее большинство этих колебаний, однако, сильно затухает. Лишь в исключительных случаях затухание оказывается слабым и колебания могут распространяться в виде волн. К этим случаям относятся, прежде всего, рассмотренные в предыдущем параграфе волны, для которых тепловое движение приводит (при соблюдении условий (52,17) и (53,17)) лишь к малым поправкам в законе дисперсии и к малому коэффициенту затухания Ландау.

Мы видели, однако, что для волн в холодной плазме существуют области частот, в которых отношение kc/ω становится сколь угодно большим (окрестности плазменных резонансов). Но при $k \to \infty$ условия (52,17) заведомо нарушаются, так что учет теплового движения становится необходимым. Покажем теперь, что учет теплового движения уже как малой поправки в диэлектрической проницаемости устраняет расходимость корней дисперсионного уравнения и приводит к некоторым качественно новым свойствам спектра колебаний плазмы (*Б. Н. Гершман*, 1956). При этом, как мы увидим, все еще могут быть выполнены условия, обеспечивающие экспоненциальную малость затухания Ландау, так что антиэрмитовой частью $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно по-прежнему пренебречь. Будем для определенности говорить об окрестности высокочастотных плазменных резонансов, где достаточно учесть тепловое движение лишь электронов.

Поправочные члены в $\varepsilon_{\alpha\beta}$ пропорциональны $(kv_{Te})^2$ [1]. Такие же поправки возникнут и в коэффициентах A, B, C дисперсионного уравнения (56,5). Имея в виду исследовать лишь расходящийся корень этого уравнения, достаточно учесть поправочные члены только в коэффициенте A, обращающемся (без поправок) в точке резонанса в нуль.

Представим этот коэффициент в окрестности резонансной частоты (пусть это будет ω_1) в виде

$$A = a_r(\omega-\omega_1) - A_{1r}\left(\frac{v_{Te}k}{\omega_1}\right)^2. \tag{57,1}$$

Второй член представляет собой поправку от теплового движения. Коэффициенты a_r и A_{1r} берутся в точке $\omega=\omega_1$, так что от переменной ω уже не зависят (но зависят, конечно, от направления $\mathbf{k}$, т. е. от угла θ). Положив $\omega=\omega_1$ также и в коэффициентах B и C (и обозначив эти их значения посредством B_r и C_r), получим дисперсионное уравнение в окрестности резонансной частоты в виде

$$\left[a_r(\omega-\omega_1) - A_{1r}\frac{v_{Te}^2}{c^2}\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^2\right]\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^4 + B_r\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^2 + C_r = 0. \tag{57,2}$$

Нас интересует тот корень этого уравнения, который при $v_{Te}\to 0$ переходит в

$$\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^2 \approx -\frac{B_r}{a_r(\omega-\omega_1)},$$

т. е.

$$\omega-\omega_1 = -\frac{B_r\omega_1^2}{a_r c^2 k^2}. \tag{57,3}$$

Поскольку в этом решении $(kc/\omega_1)^2$ велико, то для его отыскания следует опустить в (57,2) не содержащий этой большой величины член C_r. Тогда получим следующий закон дисперсии:

$$\omega-\omega_1 = \frac{A_{1r}}{a_r}\left(\frac{kv_{Te}}{\omega_1}\right)^2 - \frac{B_r}{a_r}\left(\frac{\omega_1}{kc}\right)^2. \tag{57,4}$$

Здесь надо различать два случая в зависимости от знака A_{1r} (величины же a_r и B_r всегда положительны) [2].

---

[1]) Они получаются из членов первого порядка в разложении подынтегрального выражения в (54,5) по степеням k^2.

[2]) В положительности B_r легко убедиться из выражений (56,6—7): исключив $\varepsilon_{\parallel}$ с помощью условия $A=0$, находим $B_r=\varepsilon_\perp^2\,\mathrm{tg}^2\theta+g^2\sin^2\theta>0$. Из выражения (56,6) для A и выражений (52,11) для $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ следует, что $\partial A/\partial\omega>0$; поэтому положительно и $a_r=(\partial A/\partial\omega)_{\omega=\omega_1}$.

На рис. 20 сплошной линией изображен закон дисперсии (57,4) при $A_{1r} > 0$. Кривая пересекает ось абсцисс в точке [1])

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{c v_{Te}} \sqrt{\frac{B_r}{A_{1r}}}. \qquad (57,5)$$

При $v_{Te} \to 0$ эта точка уходит вправо на бесконечность и мы возвращаемся к кривой, отвечающей закону дисперсии (57,3) для холодной плазмы (пунктирная линия на рис. 20).

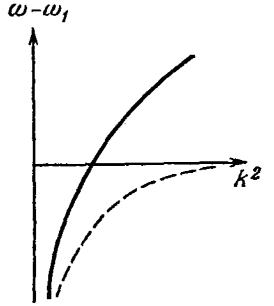

Рис. 20.

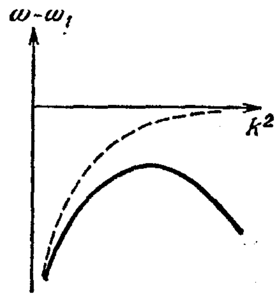

Рис. 21.

Обратим внимание на то, что учет теплового движения приводит, таким образом, к продлению ветви спектра колебаний в область $\omega > \omega_1$. В пределе равного нулю внешнего поля именно эта часть ветви отвечает обычным продольным плазменным колебаниям: в отсутствие поля коэффициент $B_r = 0$, частота ω_1 совпадает с Ω_e и вся кривая зависимости $\omega - \Omega_e$ от k^2 сводится к выходящей из начала координат прямой, уравнение которой совпадает с (32,5) [2]).

В пренебрежении тепловым движением колебания в плазменных резонансах продольны. Подчеркнем, что при учете пространственной дисперсии это свойство, строго говоря, исчезает: величина $A = \varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta / k^2 \equiv \varepsilon_l$ становится зависящей от k, и равенство $\varepsilon_l = 0$ (условие продольности колебаний) делается несовместимым со связью между теми же переменными ω, k, θ, даваемой дисперсионным уравнением. Как в самих точках плазменных резонансов (вообще теряющих свою выделенность), так и в их окрестностях волны остаются, однако, почти продоль-

[1]) Отметим, что для этого значения k отношение $k v_{Te}/\omega_1$ содержит $(v_{Te}/c)^{1/2}$ и потому мало. Это и есть упомянутое выше условие малости затухания Ландау.

[2]) В связи с этим волны, отвечающие (в магнитоактивной плазме) верхней части сплошной линии на рис. 20, принято называть плазменными, в отличие от обыкновенных или необыкновенных волн, отвечающих нижней части этой кривой. Подчеркнем, однако, условность этой терминологии: в действительности мы имеем здесь дело с единой ветвью спектра колебаний, точка пересечения которой с осью абсцисс (точка $\omega = \omega_1$) ничем не замечательна.

ными: ввиду малости A и медленности волны (малости ω/kc), поперечная компонента $E^{(t)}$ мала (согласно (32,10)) по сравнению с $E^{(l)}$.

Обратимся к случаю $A_{1r} < 0$. Характер зависимости $\omega-\omega_1$ от k для этого случая изображен на рис. 21. Кривая не выходит в область $\omega > \omega_1$, загибаясь обратно в точке максимума с координатами

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{cv_{Te}} \left(\frac{B_r}{|A_{1r}|} \right)^{1/2}, \quad \omega - \omega_1 = \frac{2v_{Te}}{a_r c} (|A_{1r}| B_r)^{1/2}. \tag{57,6}$$

При $v_{Te} \to 0$ эта точка уходит вправо на бесконечность, одновременно приближаясь к оси ординат, и мы снова возвращаемся к кривой закона (57,3).

В качестве еще одного примера рассмотрим поперечные волны вблизи электронного циклотронного резонанса, распространяющиеся вдоль магнитного поля. В пренебрежении тепловым движением закон дисперсии этих волн дается формулой (56,9) (с нижними знаками), причем в окрестности точки $\omega = \omega_{Be}$ [1]

$$\omega = \omega_{Be} \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{k^2c^2} \right) \tag{57,7}$$

(при этом $kc \gg \Omega_e$), весь этот спектр лежит при $\omega < \omega_{Be}$.

Для исследования этих волн с учетом теплового движения электронов надо составить дисперсионное уравнение с тензором диэлектрических проницаемостей (55,7), как раз относящимся к области циклотронного резонанса [2]. Раскрыв определитель (56,4) (с вектором $\mathbf{k}$, направленным вдоль оси z), получим

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega-\omega_{Be})} F\left(\frac{\omega-\omega_{Be}}{\sqrt{2}\, kv_{Te}} \right). \tag{57,8}$$

Вне линии резонансного поглощения, т. е. при $|\omega_{Be}-\omega| \gg kv_{Te}$ (но, конечно, по-прежнему $|\omega_{Be}-\omega| \ll \omega_{Be}$), это соотношение принимает вид

$$\frac{k^2c^2}{\omega_{Be}^2} = -\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}(\omega-\omega_{Be})} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be} kv_{Te}} \exp\left(-\frac{(\omega-\omega_{Be})^2}{2k^2v_{Te}^2} \right).$$

Отсюда снова получается закон дисперсии (57,7) для вещественной части частоты и выражение

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \omega_{Be} \frac{\omega_{Be}}{kv_{Te}} \left(\frac{\Omega_e}{ck} \right)^4 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_e}{ck} \right)^4 \left(\frac{\omega_{Be}}{kv_{Te}} \right)^2 \right\} \tag{57,9}$$

для коэффициента затухания Ландау.

---

[1] Для большей определенности считаем, что не только $\omega_{Be}-\omega \ll \omega_{Be}$, но и что $\Omega_e > \omega_{Be}$, так что единицей в правой стороне (56,9) можно заведомо пренебречь.

[2] Напомним, что формулы (55,7) предполагают также и соблюдение условия (55,4): $\omega_{Be} \gg kv_{Te}$.

При дальнейшем приближении ω к ω_{Be}, в области $|\omega_{Be}-\omega| \ll kv_{Te}$, коэффициент затухания растет, становясь сравнимым с самой частотой ω; в этой области уже нельзя говорить о распространении волн.

§ 58. Уравнения гидродинамики магнитоактивной плазмы

Если характерные пространственные размеры L в движущейся плазме велики по сравнению с длинами свободного пробега,

$$L \gg l, \tag{58,1}$$

то можно считать, что благодаря столкновениям в каждом небольшом участке плазмы устанавливается термодинамическое равновесие со своими местными значениями температуры (одинаковыми для электронов и ионов), давления и т. п. В таких случаях движение плазмы может описываться макроскопическими гидродинамическими уравнениями.

Уравнения магнитной гидродинамики были написаны в VIII, § 51. При этом, однако, подразумевалось, что кинетические коэффициенты среды (ее вязкость, теплопроводность) не зависят от магнитного поля. В плазме для этого должны быть выполнены условия

$$\nu_i \gg \omega_{Bi}, \quad \nu_e \gg \omega_{Be}$$

(второе условие следует из первого). Эти условия часто оказываются слишком жесткими, в связи с чем возникает необходимость в составлении гидродинамических уравнений, свободных от указанного ограничения[1]).

Уравнение непрерывности для массовой плотности ρ сохраняет, конечно, свой обычный вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \tag{58,2}$$

где $\mathbf{V}$ — макроскопическая скорость. Остается прежним также и общий вид уравнения Навье — Стокса

$$\rho\left[\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla) V_\alpha\right] + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]_\alpha = -\frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{58,3}$$

и уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho U + \frac{B^2}{8\pi}\right) = \\ = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{V}\left(\frac{V^2}{2} + W\right) - (\sigma' \mathbf{V}) + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}] + \mathbf{q}\right], \tag{58,4}$$

[1]) Кроме того, в VIII, § 51, были опущены члены в уравнениях, описывающие термоэлектрический эффект.