При дальнейшем приближении ω к ω_{Be}, в области $|\omega_{Be}-\omega| \ll kv_{Te}$, коэффициент затухания растет, становясь сравнимым с самой частотой ω; в этой области уже нельзя говорить о распространении волн.

§ 58. Уравнения гидродинамики магнитоактивной плазмы

Если характерные пространственные размеры L в движущейся плазме велики по сравнению с длинами свободного пробега,

$$L \gg l, \tag{58,1}$$

то можно считать, что благодаря столкновениям в каждом небольшом участке плазмы устанавливается термодинамическое равновесие со своими местными значениями температуры (одинаковыми для электронов и ионов), давления и т. п. В таких случаях движение плазмы может описываться макроскопическими гидродинамическими уравнениями.

Уравнения магнитной гидродинамики были написаны в VIII, § 51. При этом, однако, подразумевалось, что кинетические коэффициенты среды (ее вязкость, теплопроводность) не зависят от магнитного поля. В плазме для этого должны быть выполнены условия

$$\nu_i \gg \omega_{Bi}, \quad \nu_e \gg \omega_{Be}$$

(второе условие следует из первого). Эти условия часто оказываются слишком жесткими, в связи с чем возникает необходимость в составлении гидродинамических уравнений, свободных от указанного ограничения [1]).

Уравнение непрерывности для массовой плотности ρ сохраняет, конечно, свой обычный вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \tag{58,2}$$

где $\mathbf{V}$ — макроскопическая скорость. Остается прежним также и общий вид уравнения Навье—Стокса

$$\rho \left[\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla) V_\alpha \right] + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_\alpha = -\frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{58,3}$$

и уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho U + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \\ = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{V^2}{2} + W \right) - (\sigma' \mathbf{V}) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}] + \mathbf{q} \right], \tag{58,4}$$

[1]) Кроме того, в VIII, § 51, были опущены члены в уравнениях, описывающие термоэлектрический эффект.

где $\sigma'_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений; $(\sigma'\mathbf{V})$ обозначает вектор с составляющими $\sigma'_{\alpha\beta}V_\beta$; $\mathbf{q}$ — плотность потока энергии, включающая в себя как диссипативную часть, связанную с теплопроводностью и термоэлектрическими явлениями, так и конвективный перенос энергии током (см. ниже определение (58,8)); U и W — внутренняя энергия и тепловая функция среды, отнесенные к единице ее массы. Тензор $\sigma'_{\alpha\beta}$ и вектор $\mathbf{q}$ должны быть выражены через градиенты термодинамических величин и скорости; вид этих выражений как раз и зависит от магнитного поля.

В связи с уравнением (58,3) необходимо сделать следующее замечание. В этом уравнении учтена сила, действующая на плазму со стороны магнитного поля (последний член слева), но опущена сила

$$e(zN_i - N_e)\,\mathbf{E},$$

действующая со стороны электрического поля. Это пренебрежение в данном случае оправдано: из условия (58,1) следует, что и подавно $L \gg a$, а потому плазма квазинейтральна, так что можно положить $zN_i = N_e$ и некомпенсированные заряды в плазме отсутствуют [1]).

К уравнениям (58,2—4) надо добавить уравнения Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля (уравнения без тока смещения):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{58,5}$$

Напомним, что квазистационарность поля означает малость частоты его изменения ω в смысле $\omega \ll c/L$. При этом электрическое поле, индуцируемое переменным магнитным полем, $E \sim \sim \omega LB/c \ll B$; именно поэтому в (58,4) надо учитывать плотность энергии лишь магнитного, но не электрического, поля. Отметим также, что пренебрежение током смещения находится в соответствии с предположением о квазинейтральности плазмы: из последнего уравнения (58,5) следует $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$.

Наконец, надо присоединить уравнение, выражающее «обобщенный закон Ома», вида

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{VB}] = \mathbf{F}, \tag{58,6}$$

[1]) Это рассуждение основано на неравенстве $l \gg a$. Напомним, что мы везде имеем в виду полностью ионизованную плазму. В частично ионизованной плазме неравенство $l \gg a$ может не выполняться ввиду уменьшения длины пробега благодаря столкновениям с нейтральными атомами, и тогда требование $l \gg a$ надо рассматривать как дополнительное условие, необходимое для пренебрежения объемной электрической силой.

где $\mathbf{F}$ — некоторая линейная комбинация тока $\mathbf{j}$ и градиентов термодинамических величин. Напомним (ср. VIII, § 49), что происхождение комбинации из $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в левой стороне (58,6) связано с преобразованием $\mathbf{E}$ при переходе от системы покоя данного элемента объема среды к системе отсчета, в которой он движется со скоростью $\mathbf{V}$.

В квазинейтральной плазме относительная концентрация ее компонент (электроны и ионы) есть заданная неизменная величина ($N_e/N_i = z$). Поэтому независимыми термодинамическими переменными являются лишь температура и давление; вопрос о выражении $\mathbf{F}$ и $\mathbf{q}$ через градиенты этих величин (и ток $\mathbf{j}$) формально совпадает с таким же вопросом в теории термогальваномагнитных эффектов в металлах (см. VIII, § 25)[1]).

Соотношения между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$, с одной стороны, и полем и градиентами термодинамических величин — с другой, записываются в виде, обобщающем соотношения (44,12—13):

$$F_\alpha + \frac{1}{e}\frac{\partial \mu_e}{\partial x_\alpha} = \sigma^{-1}_{\alpha\beta} j_\beta + \alpha_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \tag{58,7}$$

$$q_\alpha = -\frac{\mu_e}{e} j_\alpha + \beta_{\alpha\beta} j_\beta - \varkappa_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}. \tag{58,8}$$

Здесь μ_e — химический потенциал электронов, а тензоры $\sigma'_{\alpha\beta}$, $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ зависят, как от параметра, от магнитного поля $\mathbf{B}$. Отсутствие в левой стороне (58,8) члена $-\varphi\mathbf{j}$ (ср. (44,13)) связано с тем, что величина $\varphi\mathbf{j}$ уже учтена в (58,4) вектором Пойнтинга в плотности потока энергии. В этом легко убедиться, преобразовав с помощью уравнений Максвелла (58,5) его дивергенцию:

$$-\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{8\pi} + \mathbf{jE} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{8\pi} - \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j}).$$

Таким образом, поток энергии $\mathbf{q}$ в (58,8) уже не содержит в себе переноса частицами энергии $-e\varphi$.

В силу принципа Онсагера, коэффициенты в соотношениях (58,7—8) связаны друг с другом соотношениями

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}), \quad \varkappa_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \varkappa_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}), \tag{58,9}$$

$$\beta_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = T\alpha_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \tag{58,10}$$

Поскольку $\mathbf{B}$ — единственный имеющийся в нашем распоряжении векторный параметр, зависимость тензоров от направления $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ может быть написана в общем виде

$$\alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \alpha_1\delta_{\alpha\beta} + \alpha_2 b_\alpha b_\beta + \alpha_3 e_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma \tag{58,11}$$

[1]) Снова напомним, что речь идет о полностью ионизованной плазме. Наличие нескольких видов тяжелых частиц (различные ионы, нейтральные атомы) потребовало бы учета соответствующих диффузионных процессов.

(и аналогично для остальных тензоров), где скалярные коэффициенты α_1, α_2, α_3—функции величины поля B; такая зависимость удовлетворяет требованию симметрии по отношению к инверсии: $\mathbf{B}$—аксиальный вектор, и его компоненты не меняют знак при инверсии, как должно быть и для компонент истинных тензоров $\alpha_{\alpha\beta}$, ... Отметим, что выражения вида (58,11) автоматически удовлетворяют соотношениям (58,9), а (58,10) принимает вид

$$\beta_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = T\alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{B}). \tag{58,12}$$

При фактическом применении выражений (58,7—8) в магнитной гидродинамике градиент химического потенциала удобнее выразить через градиенты давления и температуры согласно

$$\nabla\mu_e = -s_e\nabla T + \frac{1}{N_e}\nabla P_e, \qquad \mu_e = w_e - Ts_e,$$

где $P_e = N_eT = Pz/(1+z)$—парциальное давление электронов в плазме, s_e и w_e—энтропия и тепловая функция электронной компоненты плазмы, отнесенные к одной частице. Окончательно перепишем соотношения (58,7—8) в векторном виде как

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{VB}] + \frac{1}{eN_e}\nabla P_e =$$
$$= \frac{\mathbf{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{\mathbf{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \mathcal{R}[\mathbf{Bj}] + \alpha_\parallel(\nabla T)_\parallel + \alpha_\perp(\nabla T)_\perp + \mathcal{N}[\mathbf{B}\nabla T], \tag{58,13}$$

$$\mathbf{q} + \frac{w_e}{e}\mathbf{j} =$$
$$= \alpha_\parallel T\mathbf{j}_\parallel + \alpha_\perp T\mathbf{j}_\perp + \mathcal{N}T[\mathbf{Bj}] - \varkappa_\parallel(\nabla T)_\parallel - \varkappa_\perp(\nabla T)_\perp + \mathcal{L}[\mathbf{B}\nabla T], \tag{58,14}$$

где введены новые обозначения для коэффициентов (все они — функции $\mathbf{B}$), а индексы $\parallel$ и $\perp$ означают составляющие векторов, продольные и поперечные относительно $\mathbf{B}$. Определение коэффициента $\alpha_\parallel$ в (58,13) отличается от его определения в (58,7) включением в него величины s_e/e. Коэффициенты $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$ описывают соответственно так называемые эффекты Холла, Нернста и Ледюка—Риги. Напомним также, что члены $\mathcal{R}[\mathbf{Bj}]$ в (58,13) и $\mathcal{L}[\mathbf{B}\nabla T]$ в (58,14) представляют собой бездиссипативные кинетические эффекты: они выпадают из произведений $\mathbf{Ej}$ и $\mathbf{q}\nabla T$ и потому не связаны с увеличением энтропии.

Что касается тензора вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$, то его общее выражение через градиенты макроскопической скорости было написано уже в § 13. В применении к плазме это выражение несколько упрощается ввиду обращения в нуль обоих коэффициентов второй вязкости ζ и ζ_1. Равенство нулю коэффициента ζ есть общее свойство всех одноатомных газов, к каковым относится и плазма. Причина же отсутствия члена с ζ_1 объяснена в следующем параграфе.

Остальные члены в (13,18) в применении к плазме целесообразно несколько перегруппировать, имея в виду, что в плазме влияние магнитного поля на вязкость является, вообще говоря, сильным эффектом (а не слабым, как в нейтральном газе); поэтому не имеет смысла выделять обычный коэффициент вязкости η. Представим здесь $\sigma'_{\alpha\beta}$ в виде, отличающемся от (13,18) лишь тем, что член с η заменен членом

$$\eta_0 (3b_\alpha b_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \left(b_\gamma b_\delta V_{\gamma\delta} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right), \tag{58,15}$$

где (вместо $\mathbf{h}$) $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$; о целесообразности такого определения η_0 см. ниже, примечание на стр. 306.

Если выбрать ось z в направлении $\mathbf{b}$, то компоненты тензора напряжений примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xx} &= -\eta_0\left(V_{zz} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \eta_1 (V_{xx} - V_{yy}) + 2\eta_3 V_{xy},\\
\sigma'_{yy} &= -\eta_0\left(V_{zz} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \eta_1 (V_{xx} - V_{yy}) - 2\eta_3 V_{xy},\\
\sigma'_{zz} &= 2\eta_0\left(V_{zz} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right),\\
\sigma'_{xy} &= 2\eta_1 V_{xy} - \eta_3 (V_{xx} - V_{yy}),\\
\sigma'_{xz} &= 2\eta_2 V_{xz} + 2\eta_4 V_{yz},\\
\sigma'_{yz} &= 2\eta_2 V_{yz} - 2\eta_4 V_{xz}.
\end{aligned} \tag{58,16}$$

§ 59. Кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле

При вычислении кинетических коэффициентов магнитоактивной плазмы надо, как обычно, искать функции распределения частиц в виде $f = f_0 + \delta f$, где δf — малая поправка к локально-равновесному распределению, пропорциональная соответствующему градиенту термодинамических величин. При подстановке такого выражения в кинетическое уравнение, например, для электронов

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} - \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = \operatorname{St} f_e \tag{59,1}$$

в первых трех членах в левой стороне полагаем $f_e = f_{0e}$; четвертый же член при этом обращается в нуль (поскольку вектор $\partial f_{0e}/\partial \mathbf{p}$ направлен вдоль $\mathbf{v}$); поэтому здесь надо сохранить член