сится и плазма. Причина же отсутствия члена с ζ_1 объяснена в следующем параграфе.

Остальные члены в (13,18) в применении к плазме целесообразно несколько перегруппировать, имея в виду, что в плазме влияние магнитного поля на вязкость является, вообще говоря, сильным эффектом (а не слабым, как в нейтральном газе); поэтому не имеет смысла выделять обычный коэффициент вязкости η. Представим здесь $\sigma'_{\alpha\beta}$ в виде, отличающемся от (13,18) лишь тем, что член с η заменен членом

$$\eta_0(3b_\alpha b_\beta-\delta_{\alpha\beta})\left(b_\gamma b_\delta V_{\gamma\delta}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right), \tag{58,15}$$

где (вместо $\mathbf{h}$) $\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$; о целесообразности такого определения η_0 см. ниже, примечание на стр. 306.

Если выбрать ось z в направлении $\mathbf{b}$, то компоненты тензора напряжений примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xx}&=-\eta_0\left(V_{zz}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right)+\eta_1(V_{xx}-V_{yy})+2\eta_3V_{xy},\\
\sigma'_{yy}&=-\eta_0\left(V_{zz}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right)+\eta_1(V_{xx}-V_{yy})-2\eta_3V_{xy},\\
\sigma'_{zz}&=2\eta_0\left(V_{zz}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right),\\
\sigma'_{xy}&=2\eta_1V_{xy}-\eta_3(V_{xx}-V_{yy}),\\
\sigma'_{xz}&=2\eta_2V_{xz}+2\eta_4V_{yz},\\
\sigma'_{yz}&=2\eta_2V_{yz}-2\eta_4V_{xz}.
\end{aligned} \tag{58,16}$$

§ 59. Кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле

При вычислении кинетических коэффициентов магнитоактивной плазмы надо, как обычно, искать функции распределения частиц в виде $f=f_0+\delta f$, где δf — малая поправка к локально-равновесному распределению, пропорциональная соответствующему градиенту термодинамических величин. При подстановке такого выражения в кинетическое уравнение, например, для электронов

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}}-e\mathbf{E}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}=\operatorname{St}f_e \tag{59,1}$$

в первых трех членах в левой стороне полагаем $f_e=f_{0e}$; четвертый же член при этом обращается в нуль (поскольку вектор $\partial f_{0e}/\partial\mathbf{p}$ направлен вдоль $\mathbf{v}$); поэтому здесь надо сохранить член с δf_e и, таким образом, находим следующее уравнение для δf_e [1]):

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{r}}-e\mathbf{E}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}=\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta f_e}{\partial \mathbf{p}}+I(\delta f_e), \tag{59,2}$$

где I — линеаризованный интеграл столкновений.

Отметим прежде всего, что коэффициенты продольных электропроводности $\sigma_{\parallel}$ и теплопроводности $\varkappa_{\parallel}$ вообще не зависят от $\mathbf{B}$, оставаясь равными своим значениям в отсутствие магнитного поля (т. е. обычным скалярным σ и $\varkappa$). Действительно, из соображений симметрии заранее очевидно, что при совпадении направлений векторов $\mathbf{E}$ или ∇T с направлением $\mathbf{B}$ функция распределения δf не зависит от угла φ поворота поперечной скорости $\mathbf{v}_{\perp}$ в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{B}$. Между тем

$$[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{p}}=-\frac{B}{m}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \varphi}$$

и, следовательно, при $\partial\,\delta f/\partial\varphi=0$ магнитное поле вообще выпадает из кинетического уравнения [2]).

По такой же причине не зависит от магнитного поля (и тем самым совпадает с обычной вязкостью η) также и коэффициент вязкости η_0 — тот коэффициент, который определяет вязкие напряжения $\sigma'_{\alpha\beta}$, когда скорость $\mathbf{V}$ направлена вдоль $\mathbf{B}$ (ось z) и зависит только от координаты z; при этом в выражениях (58,16) остаются лишь члены с

$$\sigma'_{xx}=\sigma'_{yy}=-\frac{1}{2}\sigma'_{zz}=-\frac{2}{3}\eta_0\frac{dV}{dz}.$$

Наконец, должен был бы быть не зависящим от поля коэффициент ζ_1, который для указанного распределения скорости дал бы в тензоре напряжений вклад

$$\sigma'_{xx}=\sigma'_{yy}=\frac{1}{2}\sigma'_{zz}=\zeta_1\frac{dV}{dz}.$$

---

[1]) Напомним, что при вычислении диэлектрической проницаемости плазмы в § 29 член с магнитным полем в этом уравнении был опущен, поскольку при малых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ он является малой величиной второго порядка. В рассматриваемой же здесь задаче магнитное поле $\mathbf{B}$ (в противоположность электрическому полю $\mathbf{E}$) отнюдь не предполагается малым.

[2]) Сразу же оговорим, однако, что эти рассуждения (и аналогичные рассуждения ниже) предлагают, что процесс рассеяния частиц не зависит от магнитного поля. Для этого необходимо, чтобы магнитное поле удовлетворяло неравенству (59,10) — см. ниже.

Но поскольку в отсутствие поля этот эффект вообще отсутствует, то тем самым $\zeta_1=0$ и при наличии поля[1]). (Отметим, что эта причина не связана с классичностью плазмы, так что равенство $\zeta_1=0$ имело бы место и в релятивистском случае—в противоположность коэффициенту ζ, отличному от нуля в релятивистской плазме.)

Вычисление остальных кинетических коэффициентов можно произвести в аналитическом виде в предельном случае сильных магнитных полей, когда (для каждого рода частиц) ларморова частота $\omega_B \gg \nu$. В этих условиях столкновения играют роль малой поправки[2]).

Электропроводность

Начнем с вычисления коэффициентов, определяющих электрический ток в плазме. Эти вычисления удобно производить в системе отсчета, в которой данный элемент объема плазмы покоится. Пренебрегая величинами $\sim m/M$, эту систему можно считать совпадающей с системой покоя ионной компоненты. Электрический ток в такой системе—чисто электронный. Поэтому надо решать лишь кинетическое уравнение для электронов.

Левая сторона кинетического уравнения должна была бы быть преобразована с помощью гидродинамических уравнений, подобно тому, как это было сделано в § 6 для обычного газа. При этом в выбранной системе отсчета в рассматриваемой точке макроскопическая скорость (но, конечно, не ее производные) равна нулю[3]).

В полном проведении этих вычислений, однако, в данном случае (для электронов) нет необходимости. Прежде всего замечаем, что можно вообще опустить член $\partial\,\delta f_e/\partial t$. Дифференцирование по времени приводит к появлению членов с производными $\partial T/\partial t$, $\partial P/\partial t$ и $\partial \mathbf{V}/\partial t$. Из них первые две выражаются через скаляр $\operatorname{div}\mathbf{V}$ (ср. (6,16)); но такие члены, как нам уже известно, в случае одноатомного газа (каковым является плазма) все равно взаимно сокращаются. Производная же $\partial\mathbf{V}/\partial t$, выраженная из гидродинамического уравнения (58,3), содержит множитель $1/\rho$, т. е. множитель $1/M$; учет таких членов в кинетиче-

---

[1]) Подчеркнем лишний раз, что все эти утверждения связаны с видом содержащего $\mathbf{B}$ члена в кинетическом уравнении (59,2). Они не относятся поэтому к обычному газу, молекулы которого обладают магнитным моментом, через посредство которого (а не через заряд частиц, как в плазме) и осуществляется в этом случае взаимодействие с магнитным полем.

[2]) Кинетические коэффициенты магнитоактивной плазмы вычислялись *Ландсгофом* (*R. Landshoff*, 1949), *Е. С. Фрадкиным* (1951) и *С. И. Брагинским* (1952). Излагаемый ниже аналитический метод принадлежит *И. Е. Тамму* (1951).

[3]) Это по существу уже подразумевалось выше, где использовалось совпадение направлений векторов $\partial f_0/\partial \mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$.

ском уравнении привел бы лишь к поправкам $\sim m/M$, которыми мы не интересуемся. Далее, можно положить в (59,2) $\mathbf{E}=0$, поскольку заранее известно, что $\mathbf{E}$ может войти в искомый ток $\mathbf{j}$ лишь в виде суммы

$$\mathbf{E}+\frac{1}{eN_e}\nabla P.$$

Наконец, поскольку мы не имеем в виду вычислять независящие от магнитного поля «продольные» кинетические коэффициенты ($\sigma_{||}$, $\varkappa_{||}$, η_0), то можно считать все термодинамические величины плазмы зависящими лишь от координат в плоскости, перпендикулярной направлению $\mathbf{B}$. Обозначив оператор дифференцирования в этой плоскости посредством $\nabla_\perp$, напишем, таким образом, кинетическое уравнение в виде

$$(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e}=\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta f_e}{\partial\mathbf{p}}+I(\delta f_e). \tag{59,3}$$

В свою очередь это уравнение можно решать последовательными приближениями по степеням $1/\omega_{Be}$. Первому приближению (которое отметим индексом (1)) отвечает полное пренебрежение интегралом столкновений, т. е. уравнение

$$[\mathbf{vb}]\frac{\partial\,\delta f_e^{(1)}}{\partial\mathbf{v}}=\frac{1}{\omega_{Be}}(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e} \tag{59,4}$$

($\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$). Решение этого уравнения:

$$\delta f_e^{(1)}=-\frac{1}{\omega_{Be}}(\mathbf{v}[\mathbf{b}\nabla_\perp f_{0e}]), \tag{59,5}$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой. Заранее очевидно, что с его помощью можно вычислить только бездиссипативные кинетические коэффициенты: в отсутствие столкновений диссипация энергии отсутствует.

Плотность электрического тока дается интегралом

$$\mathbf{j}=-e\int\mathbf{v}\,\delta f_e\,d^3p. \tag{59,6}$$

Подставив сюда (59,5), пишем

$$\mathbf{j}^{(1)}=\frac{mc}{B}([\mathbf{b}\nabla_\perp]\langle\mathbf{v})\,\mathbf{v}\rangle N_e=\frac{mc}{3B}[\mathbf{b}\nabla_\perp]N_e\langle v^2\rangle,$$

где усреднение производится по максвелловскому распределению. В результате находим

$$\mathbf{j}^{(1)}=\frac{c}{B}[\mathbf{b}\nabla_\perp P_e],\qquad \nabla_\perp P_e=-\frac{B}{c}[\mathbf{bj}^{(1)}]. \tag{59,7}$$

Сравнив это выражение с определением коэффициента $\mathcal{R}$ в (58,13), получим

$$\mathcal{R} = -1/N_e ec. \tag{59,8}$$

В следующем приближении ищем решение уравнения (59,3) в виде $\delta f_e = \delta f_e^{(1)} + \delta f_e^{(2)}$ и для $\delta f_e^{(2)}$ находим уравнение

$$\omega_{Be}[\mathbf{vb}]\frac{\partial\,\delta f_e^{(2)}}{\partial\mathbf{v}} = -I(\delta f_e^{(1)}) = \frac{1}{\omega_{Be}}I(\mathbf{v}[\mathbf{b}\nabla_\perp]f_{0e}) \tag{59,9}$$

(оператор $\nabla_\perp$ нельзя выносить из-под знака I, поскольку в линеаризованном интеграле столкновений подынтегральное выражение содержит в своих коэффициентах зависящие от координат величины — например N_i).

Как было уже условлено, магнитное поле предполагается настолько сильным, что $\omega_{Be} \gg \nu_e$. Далее, в этом параграфе будем, однако, считать в то же время, что

$$r_{Be} = v_{Te}/\omega_{Be} \gg a_e \tag{59,10}$$

(т. е. $\omega_{Be} \ll \Omega_e$), чем величина поля ограничивается сверху. При выполнении этого условия поле почти не искривляет траектории электронов (и уж тем более ионов) в области столкновений и тем самым не оказывает влияния на процесс столкновения. Другими словами, оператор I не зависит явно от поля. Но тогда в силу соображений симметрии правая часть уравнения (59,9) должна иметь векторную структуру вида $(\mathbf{v}[\mathbf{b}\nabla_\perp])\varphi(v^2)$; по отношению к переменной $\mathbf{v}$ эта структура такая же, как и у правой стороны (59,4) (причем вместо $\nabla_\perp$ стоит $[\mathbf{b}\nabla_\perp]$). Решение уравнения (59,9) есть поэтому

$$\delta f_e^{(2)} = -\frac{1}{\omega_{Be}^2}I(\mathbf{v}[\mathbf{b}[\mathbf{b}\nabla_\perp]]f_{0e}) = \frac{1}{\omega_{Be}^2}I(\mathbf{v}\nabla_\perp f_{0e}). \tag{59,11}$$

При вычислении тока отличный от нуля вклад возникает только от ei-столкновений. Действительно, поскольку столкновения представляют собой в рассматриваемых условиях малый эффект, вклад в проводимость от ee- и ei-столкновений можно учитывать независимо. Это значит, например, что вклад от ee-столкновений вычисляется по функции распределения, получающейся в результате решения кинетического уравнения, в правой части которого стоит интеграл только этих столкновений, как если бы с ионами электроны вообще не сталкивались. Но тогда интеграл $\int \mathbf{v}\delta f_e^{(2)} d^3p$ с функцией $\delta f_e^{(2)}$ вида (59,11) обращается в нуль, поскольку в силу закона сохранения импульса при столкновениях для произвольной функции распределения f_e имеем тождественно

$$\int \mathbf{v} \mathrm{St}_{ee} f_e d^3p = 0$$

(ср. § 5).

Таким образом, при вычислении электрического тока надо понимать в (59,11) символ I как электрон-ионный интеграл столкновений. При этом[1])

$$I_{ei}(\mathbf{v}\nabla_\perp f_{0e}) = -\nu_{ei}(v)(\mathbf{v}\nabla_\perp) f_{0e}, \tag{59,12}$$

где согласно (44,3)

$$\nu_{ei}(v) = \frac{4\pi z e^4 N_e L_e}{m^2 v^3}.$$

Вклад в ток от функции распределения (59,11—12) равен

$$\mathbf{j}^{(2)} = \frac{eN_e}{3\omega_{Be}^2} \nabla_\perp \langle v^2 \nu_{ei}(v) \rangle = \frac{4\sqrt{2\pi} z e^5 L_e N_e}{3m^{3/2}\omega_{Be}^2} \nabla_\perp \frac{P_e}{T^{3/2}}. \tag{59,13}$$

Для вычисления искомых кинетических коэффициентов надо подставить ток $\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}$ в равенство (58,13)

$$\frac{1}{eN_e}\nabla_\perp P_e = \frac{\mathbf{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}_\perp] + \alpha_\perp \nabla_\perp T + \mathcal{N} B[\mathbf{b}\nabla_\perp T], \tag{59,14}$$

определяющие эти коэффициенты. Положив сначала $\nabla T = 0$ и собирая члены порядка $1/\omega_{Be}$, найдем, что

$$\mathbf{j}^{(1)}/\sigma_\perp + \mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}^{(2)}] = 0,$$

откуда

$$\sigma_\perp = \frac{3\pi^{1/2} e^2 N_e}{2^{1/2} m \nu_{ei}}, \tag{59,15}$$

где ν_{ei} (без указания аргумента) обозначает

$$\nu_{ei} = \nu_{ei}(v_{Te}) = \frac{4\pi z e^4 L_e N_e}{m^{1/2} T^{3/2}}. \tag{59,16}$$

Величина (59,15) того же порядка, что и проводимость (43,8) в отсутствие поля, с которой в данном случае совпадает и $\sigma_\parallel$.

---

[1]) Ср. (44,1). Напомним, что формула такого вида для $\mathrm{St} f$ имеет место, если столкновения происходят с частицами, которые можно считать неподвижными, и если δf имеет вид $(\mathbf{v}\mathbf{A}) g(v)$, где $\mathbf{A}$ — постоянный вектор. В данном случае роль $\mathbf{A}$ играет векторный оператор $\nabla_\perp$.

Аналогичным образом, положив в (59,14) $\nabla P_e = 0$ и снова собирая члены $\sim 1/\omega_{Be}$, найдем

$$\mathcal{R}B\,[\mathbf{b}\mathbf{j}^{(2)}] + \mathcal{N}B\,[\mathbf{b}\nabla T] = 0,$$

откуда

$$\mathcal{N} = -\frac{\nu_{ei}}{(2\pi)^{1/2} m c \omega_{Be}^2} = -\frac{3cN_e}{2\sigma_\perp B^2}. \tag{59,17}$$

Что касается коэффициента $\alpha_\perp$, то он появляется лишь еще в следующем приближении по $1/\omega_{Be}$ и оказывается равным (для $z = 1$)

$$\alpha_\perp = 0{,}36\,(\nu_{ei}/\omega_{Be})^2. \tag{59,18}$$

Электронная теплопроводность

Тепловой поток в плазме складывается как из электронной, так и из ионной частей; рассмотрим сначала первую из них.

Электронный тепловой поток вычисляется как интеграл

$$\mathbf{q}_e = \frac{m}{2}\int v^2 \mathbf{v}\,\delta f_e\, d^3p. \tag{59,19}$$

В первом приближении по $1/\omega_{Be}$, подставив сюда (59,5), находим

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = -\frac{m}{2\omega_{Be}}\left([\mathbf{b}\nabla_\perp]\langle \mathbf{v})\,\mathbf{v}v^2\rangle N_e = -\frac{m}{6\omega_{Be}}[\mathbf{b}\nabla_\perp]\,N_e\langle v^4\rangle,$$

откуда

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = -\frac{5c}{2eB}[\mathbf{b}\nabla_\perp]\,P_e T = -\frac{w_e}{e}\mathbf{j}^{(1)} - \frac{5cP_e}{2eB}[\mathbf{b}\nabla_\perp T], \tag{59,20}$$

где $w_e = 5T/2$ — электронная тепловая функция, отнесенная к одному электрону. Сравнив с определением коэффициента $\mathcal{L}$ в (58,14), получим

$$\mathcal{L}_e = -\frac{5cN_eT}{2eB^2}. \tag{59,21}$$

В следующем приближении интеграл (59,19) должен быть вычислен с функцией распределения (59,11). В тепловой поток, однако, дают вклад как ei-, так и ee-столкновения. В первом случае снова используем выражения (59,11—12) и находим

$$\mathbf{q}_e^{(ei)} = -\frac{mN_e}{6\omega_{Be}^2}\nabla_\perp\langle v^4 \nu_{ei}(v)\rangle,$$

откуда

$$\mathbf{q}_e^{(ei)} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4N_eL_e}{m^{1/2}\omega_{Be}^2}\nabla_\perp\frac{P_e}{\sqrt{T}}. \tag{59,22}$$

Для нахождения отсюда соответствующей части коэффициента теплопроводности $\varkappa_\perp$ надо, однако, учесть, еще условие $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)} = 0$, поскольку согласно (58,14) $\varkappa_\perp$ определяется по потоку тепла именно в отсутствие тока. С помощью (59,7) и (59,13) находим, что это условие означает следующее соотношение между градиентами давления и температуры:

$$\frac{c}{B}[\mathbf{b}\nabla_\perp P_e] = \frac{eN_e\nu_{ei}}{\sqrt{2\pi}m\omega_{Be}^2}\nabla_\perp T$$

(при вычислениях везде пренебрегаем членами более высокого порядка по $1/\omega_{Be}$). Вычислив с учетом этого соотношения сумму $\mathbf{q}_e^{(1)} + \mathbf{q}_e^{(ei)}$, находим

$$\varkappa_{\perp e}^{(ei)} = \frac{13}{6\sqrt{2\pi}}\frac{N_eT\nu_{ei}}{m\omega_{Be}^2}. \qquad (59,23)$$

Эта формула имеет простой физический смысл. По порядку величины коэффициент теплопроводности должен быть равен $\varkappa_\perp \sim C_eD_\perp$, где $C_e \sim N_e$—теплоемкость электронов в единице объема, а $D_\perp$—коэффициент диффузии электронов в направлении поперек магнитного поля. Последний в свою очередь оценивается как $\langle(\Delta x)^2\rangle/\delta t$, где $\langle(\Delta x)^2\rangle$—средний квадрат смещения за время δt. В магнитном поле смещение в поперечном направлении происходит лишь при столкновениях, причем электрон смещается на расстояние $\sim r_{Be}$. Поэтому $D_\perp \sim \nu_{ei}r_{Be}^2$, откуда и получается (59,23).

Обратимся к вкладу *ee*-столкновений. Вычисления здесь более громоздки; наметим их ход.

В функции (59,11) под I надо понимать теперь линеаризованный интеграл столкновений Ландау:

$$I_{ee}\delta f_e = -\operatorname{div}_{\mathbf{p}}\mathbf{s}^{(ee)},$$

где

$$s_\alpha^{(ee)} = 2\pi e^4L_e\int\frac{w^2\delta_{\alpha\beta} - w_\alpha w_\beta}{w^3}\times$$
$$\times\left\{f_{0e}\frac{\partial\delta f_e'}{\partial p_\beta'} + \delta f_e\frac{\partial f_{0e}'}{\partial p_\beta'} - f_{0e}'\frac{\partial\delta f_e}{\partial p_\beta} - \delta f_e'\frac{\partial f_{0e}}{\partial p_\beta}\right\}d^3p' \qquad (59,24)$$

($\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$). Интеграл (59,19) с такой функцией распределения после интегрирования по частям принимает вид

$$\mathbf{q}_e^{(ee)} = \frac{1}{2\omega_{Be}^2}\int\{v^2\mathbf{s}^{(ee)} + 2\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{s}^{(ee)})\}d^3p. \qquad (59,25)$$

Коэффициент в этой формуле написан так, что под δf_e в (59,24) надо теперь понимать функцию $(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e}$. При этом дифференцирование $\nabla_\perp$ достаточно применить только к температуре T в показателе максвелловской функции f_{0e}:

$$(\mathbf{v}\nabla_\perp) f_{0e} \rightarrow f_{0e}\frac{mv^2}{2T^2}(\mathbf{v}\nabla_\perp T);$$

члены, возникающие от дифференцирования предэкспоненциального множителя, взаимно сокращаются[1]).

После простого, хотя и довольно длинного вычисления интеграл (59,25) приводится к виду $-\varkappa_{\perp e}^{(ee)}\nabla_\perp T$, где[2])

$$\varkappa_{\perp e}^{(ee)} = \frac{\pi L_e e^4}{3T^2\omega_{Be}^2}\int\left\{wV^2 + \frac{(\mathbf{wV})^2}{w} + \ldots\right\} f_{0e}(p) f_{0e}(p')\, d^3p\, d^3p',$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}')/2$, а многоточие в фигурных скобках стоит вместо членов, содержащих нечетные степени $\mathbf{wV}$ и обращающихся в нуль при интегрировании. Заметив, что

$$f_{0e}(p) f_{0e}(p') \propto \exp\left(-\frac{mV^2}{T} - \frac{mw^2}{4T}\right),$$

и выполнив интегрирование по $d^3p\, d^3p'$, получим окончательно

$$\varkappa_{\perp e}^{(ee)} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\frac{N_e T \nu_{ee}}{m\omega_{Be}^2}, \qquad (59{,}26)$$

где

$$\nu_{ee} = \frac{4\pi e^4 N_e L_e}{m^{1/2} T^{3/2}}. \qquad (59{,}27)$$

Таким образом, весь электронный вклад в поперечную теплопроводность

$$\varkappa_{\perp e} = \frac{2N_e T \nu_{ee}}{3\sqrt{\pi}\, m\omega_{Be}^2}\left(1 + \frac{13}{4}z\right). \qquad (59{,}28)$$

Ионная теплопроводность

Отметим прежде всего, что условие применимости рассматриваемого приближения для ii-столкновений, $\omega_{Bi} \gg \nu_{ii}$, более сильное, чем для электронов. Поскольку $\nu_{ii} \sim \nu_{ee}(m/M)^{1/2}$, а $\omega_{Bi} \sim \omega_{Be} m/M$, то из $\omega_{Bi} \gg \nu_{ii}$ следует неравенство $\omega_{Be} \gg \gg \nu_{ee}(M/m)^{1/2}$, более сильное, чем $\omega_{Be} \gg \nu_{ee}$; что же касается условия $r_{Bi} \gg a$, то оно заведомо выполняется, будучи более слабым, чем (59,10).

Кинетическое уравнение для ионов аналогично уравнению (59,2):

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{r}} + ze\mathbf{E}\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{ze}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_i). \qquad (59{,}29)$$

[1]) Это обстоятельство заранее очевидно как следствие общего свойства, отмеченного в § 6: интеграл столкновений одинаковых частиц обращается в нуль для функций вида $\mathbf{v}f_0$.

[2]) Градиент давления здесь не появляется, и поэтому нет необходимости в исключении его с помощью условия $\mathbf{j} = 0$.

При преобразовании его левой части ситуация, однако, отличается от электронного случая. Подставив сюда

$$f_{0i}=\frac{N_i}{(2\pi TM)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{M}{2T}(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2\right\},$$

мы должны теперь дифференцировать $\mathbf{V}$ по t (после чего снова положить, в силу выбора системы отсчета, $\mathbf{V}=0$). При $\mathbf{V}=0$ имеем, согласно гидродинамическому уравнению движения:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{1}{\rho c}[\mathbf{jB}],$$

где давление $P=P_e+P_i$, а плотность $\rho=N_iM$. В результате кинетическое уравнение примет вид

$$\mathbf{v}\nabla_\perp f_{0i}-\frac{f_{0i}}{N_iT}\mathbf{v}\left(\nabla_\perp P-\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]\right)=-\frac{ze}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta f_i}{\partial\mathbf{p}}+I(\delta f_i), \tag{59,30}$$

где мы снова (как и в (59,3)) положили $\mathbf{E}=0$ и написали $\nabla_\perp$ вместо ∇ [1]).

Решаем уравнение (59,30) последовательными приближениями по $1/\omega_{Bi}$. В первом приближении получим аналогично (59,5):

$$\delta f_i^{(1)}=\frac{1}{\omega_{Bi}}\left(\mathbf{v}\left[\mathbf{b},\ \nabla_\perp f_{0i}-\frac{f_{0i}}{N_iT}\nabla_\perp P+\frac{f_{0i}}{cN_iT}[\mathbf{jB}]\right]\right).$$

Но в этом приближении имеем, согласно (59,7), $\nabla_\perp P_e=[\mathbf{jB}]/c$, так что

$$\delta f_i^{(1)}=\frac{1}{\omega_{Bi}}\left(\mathbf{v}\left[\mathbf{b},\ \nabla_\perp f_{0i}-\frac{f_{0i}}{P_i}\nabla_\perp P_i\right]\right). \tag{59,31}$$

Эта функция распределения не дает, разумеется, вклада в ток $\int\delta f_i^{(1)}\mathbf{v}\,d^3p=0$, как и должно быть в системе отсчета, в которой ионная компонента плазмы покоится. Для потока же тепла находим

$$\mathbf{q}_i^{(1)}=\frac{M}{2}\int v^2\mathbf{v}\,\delta f_i^{(1)}\,d^3p=$$
$$=\frac{M}{6\omega_{Bi}}\left[\mathbf{b},\ \nabla_\perp(N_i\langle v^4\rangle)-\frac{\langle v^4\rangle}{T}\nabla_\perp P_i\right]=\frac{5cP_i}{2zeB}[\mathbf{B}\nabla T],$$

откуда

$$\mathscr{L}_i=\frac{5cN_iT}{2zeB^2}=-\frac{\mathscr{L}_e}{z^2}. \tag{59,32}$$

---

[1]) В случае электронов второй член в левой стороне содержал бы вместо M/ρ множитель $m/\rho=m/MN_i$ и им можно было бы пренебречь.

При вычислении потока тепла в следующем приближении существенны только ii-столкновения: ie-столкновения дают вклад, в $\sim (m/M)^{1/2}$ раз меньший ввиду малости изменения импульса иона при столкновениях с электроном. Соответствующие вычисления полностью аналогичны произведенным выше для ee-столкновений[1]). Ионная часть теплопроводности получается поэтому из (59,26) заменой электронных величин ионными:

$$\varkappa_{\perp i} = \frac{2N_i T \nu_{ii}}{3\sqrt{\pi} M \omega_{Bi}^2}, \quad \nu_{ii} = \frac{4\pi z^2 e^4 L_i N_i}{M^{1/2} T^{3/2}}. \qquad (59,33)$$

Сравнение (59,33) с (59,23) показывает, что (при $z \sim 1$) $\varkappa_{\perp i} \sim \varkappa_{\perp e} (M/m)^{1/2}$. Таким образом, в полях, настолько больших, что $\omega_{Bi} \gg \nu_{ii}$, поперечная теплопроводность практически целиком ионная. Электронная теплопроводность сравнивается с ионной, когда $\omega_{Bi} \sim (m/M)^{1/4} \nu_{ii}$ (при сравнении следует учесть, что в таких полях влиянием магнитного поля на $\varkappa_i$ можно пренебречь). При еще меньших полях ионный вклад в $\varkappa_\perp$ становится несущественным; если при этом $\omega_{Be} \gg \nu_{ee}$, то $\varkappa_\perp$ дается формулой (59,28).

Вязкость

Импульс движущейся плазмы сосредоточен в основном в ионах, поэтому вязкость определяется ионной функцией распределения. При этом, поскольку соударения иона с электронами мало меняют импульс иона, в кинетическом уравнении надо учитывать только ион-ионные столкновения.

Левая сторона кинетического уравнения (59,29) преобразуется так же, как это было сделано в §§ 6, 8, и принимает тот же вид, что и там[2]). Таким образом, кинетическое уравнение задачи о вязкости:

$$\frac{M}{T} v_\alpha v_\beta \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) f_{0i} = -\frac{ze}{cM} [\mathbf{vB}] \frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{v}} + I_{ii}(\delta f_i). \qquad (59,34)$$

Решение этого уравнения надо искать в виде

$$\delta f_i = \sum_{n=0}^{4} g_n(v^2) V_{\gamma\delta}^{(n)} v_\gamma v_\delta, \qquad (59,35)$$

---

[1]) Член с ∇P_i, отличающий (59,31) от (59,5), при этом несуществен: эта часть функции распределения $\sim \mathbf{v} f_{0i}$ и обращает в нуль интеграл столкновений; ср. примечание на стр. 303.

[2]) При этом надо учесть, что давление плазмы $P = (N_i + N_e) T = N_i (1 + z) T$, а теплоемкость, приходящаяся на один ион, равна $3(1+z)/2$.

где $V^{(n)}_{\gamma\delta}$ — линейные комбинации из компонент тензора $V_{\alpha\beta}$, фигурирующие в выражении тензора вязких напряжений

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{4} \eta_n V^{(n)}_{\alpha\beta} \tag{59,36}$$

согласно определениям (13,18) и (58,15); напомним, что все $V^{(n)}_{\alpha\alpha} = 0$. Тензор напряжений вычисляется как интеграл

$$-\sigma'_{\alpha\beta} = \int M v_\alpha v_\beta \delta f_i \, d^3p.$$

Подставив сюда (59,35), усреднив по направлениям **v** по формуле

$$\langle v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \rangle = \frac{v^4}{15} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

и сравнив с (59,36), получим

$$\eta_n = -\frac{2M}{15} \int v^4 g_n (v^2) \, d^3p. \tag{59,37}$$

Уравнения, определяющие функции g_n, получаются подстановкой (59,35) в (59,34) и приравниванием коэффициентов, стоящих при одинаковых тензорах $V^{(n)}_{\alpha\beta}$ в обеих сторонах уравнения. Опустив детали этих довольно громоздких вычислений, приведем сразу их окончательные результаты.

Отличные от нуля коэффициенты вязкости η_3 и η_4 возникают уже в пренебрежении интегралом столкновений и потому пропорциональны $1/\omega_{Be}$. Коэффициенты же η_1 и η_2 появляются лишь в следующем приближении, с учетом столкновений, и потому пропорциональны $1/\omega^2_{Bi}$ [1]):

$$\eta_1 = \frac{\eta_2}{4} = \frac{2\pi^{1/2}(ze)^4 L_i N_i^2}{5\,(MT)^{1/2}\omega^2_{Bi}}, \quad \eta_3 = \frac{\eta_4}{2} = \frac{N_i T}{2\omega_{Bi}}. \tag{59,38}$$

Отметим в заключение, что все полученные в этом параграфе выражения для «поперечных» кинетических коэффициентов имеют смысл и при условиях, более мягких, чем общее условие (58,1). Легко убедиться в том, что поправка к функции распределения оказывается малой, уже если характерные размеры задачи велики лишь по сравнению с ларморовским радиусом r_B соответствующих частиц, чем и обеспечивается применимость указанных выражений. Это условие достаточно и для применимости самих гидродинамических уравнений, если градиенты давления и тем-

[1]) Целесообразность определения коэффициента вязкости η_0 для магнитоактивной плазмы согласно (58,15) связана с тем, что все остальные коэффициенты η оказываются тогда стремящимися к нулю при $B \to \infty$.

пературы везде поперечны по отношению к направлению магнитного поля.

В нашем рассмотрении мы везде имели в виду плазму с одинаковыми температурами электронов и ионов. Но ввиду большой разницы масс электронов и ионов нередко осуществляются условия «двухтемпературности». В таком случае также можно сформулировать систему уравнений типа гидродинамических и вычислить фигурирующие в них кинетические коэффициенты[1]).

Задачи

1. Определить тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной электронной плазмы в однородном ($k=0$) переменном электрическом поле с учетом электрон-ионных столкновений (лоренцевский случай; см. § 44).

Решение. Как было отмечено в начале параграфа, если однородное поле $\mathbf{E}$ параллельно полю $\mathbf{B}$ (ось z), то последнее вообще выпадает из кинетического уравнения. Поэтому компоненты ε_{xz}, ε_{yz}, ε_{zz} не зависят от B (при этом $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$, а ε_{zz} дается формулой (44,7)). Для нахождения же остальных компонент можно считать, что $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$.

Ищем поправку к функции распределения электронов в виде

$$\delta f_e=(\mathbf{vE})\,g_1(v)+(\mathbf{v}\,[\mathbf{Eb}])\,g_2(v). \tag{1}$$

Для функции этого типа (ср. примечание на стр. 300) интеграл столкновений

$$\mathrm{St}_{ei}f_e=-\nu_{ei}(v)\,\delta f_e,$$

так что кинетическое уравнение

$$(\nu_{ei}(v)-i\omega)\,\delta f_e-\frac{e}{c}\,[\mathbf{vB}]\frac{\partial\delta f_e}{\partial\mathbf{p}}=e\mathbf{E}\,\frac{\partial f_{0e}}{\partial\mathbf{p}}=-\frac{e}{T}\,\mathbf{vE}f_{0e}. \tag{2}$$

Оно отличается от бесстолкновительного уравнения лишь заменой ω на $\omega+i\nu_{ei}(v)$. Подстановка (1) в (2) приводит к двум алгебраическим уравнениям для g_1 и g_2, решая которые, находим

$$\delta f_e=\frac{-ie\,(\omega+i\nu_{ei}(v))\,f_{0e}}{T\,[(\omega+i\nu_{ei}(v))^2-\omega_{Be}^2]}\left\{\mathbf{v}-\frac{i\omega_{Be}\,[\mathbf{bv}]}{\omega+i\nu_{ei}(v)}\right\}\mathbf{E}\equiv\mathbf{gE}. \tag{3}$$

Диэлектрический тензор

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\frac{4\pi e}{i\omega}\int v_\alpha g_\beta\,d^3p.$$

Выпишем окончательный результат для частот

$$|\omega\pm\omega_{Be}|\gg\nu_{ei},$$

когда столкновения можно рассматривать как малое возмущение. В таком случае можно положить

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}_0+i\nu_{ei}(v)\,\frac{\partial\mathbf{g}_0}{\partial\omega},$$

где $\mathbf{g}_0$—функция $\mathbf{g}$ при $\nu_{ei}(v)=0$. Тогда

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}+i\,\frac{4\sqrt{2\pi}\,ze^4L_eN_e}{m^{1/2}T^{3/2}\omega}\,\frac{d}{d\omega}\left[\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}-\delta_{\alpha\beta}\right)\omega\right], \tag{4}$$

[1]) Этот вопрос изложен в статье *С. И. Брагинского*, Явления переноса в плазме, в сборнике «Вопросы теории плазмы», выпуск 1, Атомиздат, 1963.

где $\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости без учета столкновений. Эта формула (по той же причине, что и для (44,9)) справедлива не только в лоренцевском случае, но и для плазмы с любым z.

2. Неоднородная в направлении оси x плазма удерживается магнитным полем, направленным по оси z. При условии $\omega_{Be} \gg \nu_{ei}$ определить распределение плотности и магнитного поля в плазме, считая распределение температуры заданным (*И. Е. Тамм*, 1951).

Решение. По условию, градиенты температуры T и давления P направлены вдоль оси x. Вдоль той же оси направлено и возникающее из-за неоднородности плазмы электрическое поле $\mathbf{E}$, потенциальное в стационарном случае. Удержание же плазмы означает, что отсутствуют движение плазмы и электрический ток в направлении x: $V_x = 0$, $j_x = 0$.

Проецируя с учетом сказанного уравнения (58,13) на ось y и используя уравнение Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c$, получим

$$\frac{c}{4\pi}\frac{dB}{dx} = -j_y = \mathcal{N}\sigma_\perp B \frac{dT}{dx}.$$

Подставив в эту формулу выражение (59,17) для $\mathcal{N}\sigma_\perp$, имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{B^2}{8\pi} = -\frac{3}{2} N_e \frac{dT}{dx}. \tag{1}$$

Магнитное поле «выталкивается» из более горячих областей плазмы. Проецируя же на ось x уравнение (58,3) и пренебрегая вязкими членами, дающими вклад более высокого порядка малости по $1/B$, находим второе уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(P_e + P_i\right) = \frac{1}{c} j_y B,$$

которое с помощью того же уравнения Максвелла приводится к виду (при $z = 1$)

$$2N_e T + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const}. \tag{2}$$

Уравнению (1) можно придать более удобную форму, исключив из (1) и (2) магнитное поле. После интегрирования находим

$$N_e T^{1/4} = \text{const}. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) решают поставленную задачу. Распределение же температуры определяется уравнением теплопроводности.

§ 60. Дрейфовое приближение

Исследуя в предыдущем параграфе кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле, мы пользовались интегралом столкновений Ландау, что подразумевало выполнение неравенства $r_{Be} \gg a$ (59,10). Покажем теперь, как можно освободиться от этого ограничения, т. е. получить формулы, пригодные и в случае полей, настолько сильных, что для электронов выполняется обратное неравенство:

$$r_{Be} \ll a. \tag{60,1}$$

При этом удобно воспользоваться специальным, так называемым *дрейфовым приближением*, которое производится уже в самом