где $\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости без учета столкновений. Эта формула (по той же причине, что и для (44,9)) справедлива не только в лоренцевском случае, но и для плазмы с любым $z$.

2. Неоднородная в направлении оси $x$ плазма удерживается магнитным полем, направленным по оси $z$. При условии $\omega_{Be} \gg \nu_{ei}$ определить распределение плотности и магнитного поля в плазме, считая распределение температуры заданным (*И. Е. Тамм*, 1951).

Решение. По условию, градиенты температуры $T$ и давления $P$ направлены вдоль оси $x$. Вдоль той же оси направлено и возникающее из-за неоднородности плазмы электрическое поле $\mathbf{E}$, потенциальное в стационарном случае. Удержание же плазмы означает, что отсутствуют движение плазмы и электрический ток в направлении $x$: $V_x=0$, $j_x=0$.

Проецируя с учетом сказанного уравнения (58,13) на ось $y$ и используя уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{B}=4\pi\mathbf{j}/c$, получим

$$\frac{c}{4\pi}\frac{dB}{dx}=-j_y=\mathcal{N}\sigma_\perp B\frac{dT}{dx}.$$

Подставив в эту формулу выражение (59,17) для $\mathcal{N}\sigma_\perp$, имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{B^2}{8\pi}=-\frac{3}{2}N_e\frac{dT}{dx}. \qquad (1)$$

Магнитное поле «выталкивается» из более горячих областей плазмы. Проецируя же на ось $x$ уравнение (58,3) и пренебрегая вязкими членами, дающими вклад более высокого порядка малости по $1/B$, находим второе уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(P_e+P_i\right)=\frac{1}{c}j_yB,$$

которое с помощью того же уравнения Максвелла приводится к виду (при $z=1$)

$$2N_eT+\frac{B^2}{8\pi}=\text{const}. \qquad (2)$$

Уравнению (1) можно придать более удобную форму, исключив из (1) и (2) магнитное поле. После интегрирования находим

$$N_eT^{1/4}=\text{const}. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) решают поставленную задачу. Распределение же температуры определяется уравнением теплопроводности.

## § 60. Дрейфовое приближение

Исследуя в предыдущем параграфе кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле, мы пользовались интегралом столкновений Ландау, что подразумевало выполнение неравенства $r_{Be}\gg a$ (59,10). Покажем теперь, как можно освободиться от этого ограничения, т. е. получить формулы, пригодные и в случае полей, настолько сильных, что для электронов выполняется обратное неравенство:

$$r_{Be}\ll a. \qquad (60,1)$$

При этом удобно воспользоваться специальным, так называемым *дрейфовым приближением*, которое производится уже в самом кинетическом уравнении, а не только при его решении. Это приближение справедливо, если магнитные и электрические поля достаточно медленно меняются в пространстве и во времени. Именно, частота поля $\omega$ и эффективная частота соударений $\nu$ должны быть малы по сравнению с ларморовской частотой, а характерное расстояние, на котором меняются поля (обозначим его через $1/k$), должно быть велико по сравнению с ларморовским радиусом. Эти условия должны выполняться для каждого сорта частиц, к которым применяется дрейфовое приближение. Ниже в этом параграфе мы будем писать все формулы, для определенности, для электронов (аналогичные формулы для ионов получаются, как всегда, заменами $e \to -ze$, $\omega_{Be} \to -\omega_{Bi}$, $m \to M$). Таким образом, будут предполагаться выполненными условия

$$\omega, \ \nu_{ei} \ll \omega_{Be}, \quad 1/k \gg r_{Be}. \tag{60,2}$$

Основой рассматриваемого метода является приближенное решение уравнений движения заряженных частиц в заданных полях $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, учитывающее медленность изменения последних как функций $t$ и $\mathbf{r}$. Движение частиц в таких полях представляет собой совокупность быстро переменного вращения (с частотой $\omega_{Be}$) по «ларморовским окружностям» вместе с медленно меняющимся перемещением центров этих окружностей (или, как говорят, *ведущих центров орбит*). Метод решения состоит в выделении быстропеременной, осциллирующей составляющей движения и усреднении по нему.

Представим радиус-вектор и скорость электрона в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}, \tag{60,3}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор ведущего центра орбиты, а $\boldsymbol{\zeta}$ — осциллирующий радиус-вектор электрона относительно ведущего центра[1]). В нулевом приближении, в полном пренебрежении пространственной и временной зависимостями поля и столкновениями, мы имеем дело просто с движением в скрещенных однородных и постоянных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Как известно (см. II, § 22), в этом случае вектор $\boldsymbol{\zeta}$ лежит строго в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{B}$, и вращается в этой плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega_{Be} = eB/mc$, оставаясь неизменным по величине. Радиус окружности $|\boldsymbol{\zeta}|$ связан с постоянной скоростью $|\dot{\boldsymbol{\zeta}}| \equiv v_\perp$ согласно $|\boldsymbol{\zeta}| = v_\perp/\omega_{Be}$; в векторном виде связь между $\boldsymbol{\zeta}$ и $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ записывается в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{\omega_{Be}}[\mathbf{b}\dot{\boldsymbol{\zeta}}], \tag{60,4}$$

[1]) Не смешивать обозначение $\mathbf{V}$ в этом параграфе с макроскопической скоростью, обозначенной через $\mathbf{V}$ в § 59!

где $\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$. Центр же орбиты движется со скоростью

$$\dot{\mathbf{R}}=\mathbf{V}_0=v_{0\parallel}\mathbf{b}+\mathbf{w}_0,$$

где $v_{0\parallel}$ — скорость равномерно-ускоренного движения вдоль магнитного поля, удовлетворяющая уравнению

$$m\dot{v}_{0\parallel}=-e\mathbf{bE}, \tag{60,5}$$

а

$$\mathbf{w}_0=\dot{\mathbf{R}}_\perp=\frac{c}{B}[\mathbf{Eb}] \tag{60,6}$$

есть скорость перемещения в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$ (скорость *электрического дрейфа*)[1]).

В дальнейшем мы ограничимся этим приближением и пренебрежем членами, связанными с непостоянством полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, т. е. фактически будем считать их постоянными. В соответствии с этим мы будем опускать индексы 0 у всех величин.

Сущность дрейфового приближения состоит в переходе в кинетическом уравнении к медленно меняющимся переменным $\mathbf{R}$, $v_\parallel$, $v_\perp=|\dot{\boldsymbol{\zeta}}|$. Эти величины вместе составляют пять независимых переменных, от которых зависит функция распределения.

Элемент фазового объема в новых переменных имеет вид

$$d^3x\,d^3p=d^3R\cdot 2\pi m^3\,dv_\parallel\cdot v_\perp dv_\perp=2\pi m^3 d^3R\,dv_\parallel dJ, \tag{60,7}$$

где введена удобная для дальнейшего величина

$$J=v_\perp^2/2 \tag{60,8}$$

(при проверке соотношения (60,7) следует помнить, что в принятом приближении поля можно считать постоянными).

Выразим через новые переменные плотность тока электронов. Для одного электрона плотность тока есть $-e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)$, где $\mathbf{r}$ — бегущие координаты точки пространства, а $\mathbf{r}_e$ — координаты точки нахождения электрона. Положив $\mathbf{v}=\mathbf{V}+\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ и $\mathbf{r}_e=\mathbf{R}+\boldsymbol{\zeta}$, пишем

$$-e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)\approx -e(\mathbf{V}+\dot{\boldsymbol{\zeta}})\,[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})-\boldsymbol{\zeta}\nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}-\mathbf{R})].$$

Усредним это выражение по углу вращения с помощью очевидного соотношения

$$\omega_{Be}\langle\dot{\zeta}_\alpha[\mathbf{b}\boldsymbol{\zeta}]_\beta\rangle=\langle\dot{\zeta}_\alpha\dot{\zeta}_\beta\rangle=\frac{1}{2}v_\perp^2\delta_{\alpha\beta},$$

---

[1]) При этом предполагается, конечно, что $E/B\ll 1$, так что $w\ll c$ и релятивистскими эффектами можно пренебречь.

где $\alpha$, $\beta$ — двумерные (в плоскости, перпендикулярной магнитному полю) векторные индексы. Получим

$$-e\mathbf{V}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})+\frac{mcJ}{B}[\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{r}}]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}).$$

Умножив это выражение на функцию распределения электронов $f_e$ и интегрируя по $d^3p=2\pi m^3 dv_{\|}dJ$, получим плотность тока в $\mathbf{R}$-пространстве[1]):

$$\mathbf{j}_e=-e\int \mathbf{V}f_e d^3p-\frac{mc}{B}\operatorname{rot}\left(\mathbf{b}\int Jf_e d^3p\right). \tag{60,9}$$

Первый член в этом выражении отвечает переносу зарядов вместе с перемещающимися ларморовскими кружками, а второй учитывает вращение частиц по этим кружкам[2]). Этот второй член имеет простой физический смысл: если представить его в виде $c\operatorname{rot}\mathbf{M}$, то вектор

$$\mathbf{M}=-\frac{m\mathbf{b}}{B}\int f_e J\, d^3p \tag{60,10}$$

будет представлять собой намагниченность плазмы, связанную с вращением зарядов. Магнитный момент (60,10) не зависит от знака зарядов и направлен противоположно магнитному полю, т. е. отвечает диамагнетизму.

Преобразуем к новым переменным кинетическое уравнение. Поскольку функция распределения $f_e$ отнесена к тому же элементу фазового пространства, что и раньше (лишь преобразованному к другому виду — (60,7)), то кинетическое уравнение по-прежнему имеет вид $df_e/dt=\operatorname{St} f_e$, или, раскрыв левую часть в новых переменных,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}+v_{\|}\frac{\partial f_e}{\partial R_{\|}}+\frac{c}{B}[\mathbf{E}\mathbf{b}]\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{R}_{\perp}}=\operatorname{St} f_e. \tag{60,11}$$

Здесь введены очевидные обозначения для проекций векторов и использованы равенства (60,5—6). Член же с $\dot{v}_{\perp}$ в этом приближении отсутствует, поскольку $v_{\perp}$ при дрейфе не меняется.

Перейдем к записи интеграла столкновений в дрейфовых переменных[3]). Отметим прежде всего, что акт столкновения

[1]) Во втором члене произведено интегрирование по частям, в результате чего оператор $\nabla_{\mathbf{r}}$ переносится на $\mathbf{b}f_e$.

[2]) Заметим, что такое же усреднение плотности зарядов $-e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)$ приводит к обычному выражению $-e\int f_e d^3p$; поправочные члены, связанные с вращением частиц, появились бы здесь лишь при учете малых величин второго порядка (вторые производные по координатам).

[3]) Интеграл столкновений в дрейфовых переменных был получен *Е. М. Лифшицем* (1937) для электронного газа и обобщен для плазмы *С. Т. Беляевым* (1955).

в этих переменных состоит в «мгновенном» изменении скоростей $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ и перпендикулярных к магнитному полю компонент радиус-вектора центра кружка $\mathbf{R}_{\perp}$ (что же касается параллельной компоненты, $R_{\parallel}$, то она практически совпадает с соответствующей координатой самой частицы и при столкновении не меняется).

Столкновения происходят лишь между частицами, проходящими друг мимо друга на прицельных расстояниях $\rho$, не превышающих радиуса экранирования $a$: $\rho \leqslant a$. Если $\rho$ мало по сравнению с ларморовскими радиусами сталкивающихся частиц, то магнитное поле вообще не сказывается на процессе рассеяния, поскольку на таких расстояниях поле не искривляет заметным образом траекторий частиц. Описание таких столкновений в терминах дрейфовых переменных вообще не является естественным. Поэтому использование интеграла столкновений в этих переменных целесообразно лишь в условиях, когда по крайней мере для одной из сталкивающихся частиц $r_B \ll a$.

При кулоновском взаимодействии частиц в присутствии магнитного поля, как и в его отсутствие, существенны далекие столкновения и соответственно малые изменения всех переменных. Поэтому произведенный в § 41 вывод интеграла столкновений в $\mathbf{p}$-пространстве остается в силе и для интеграла столкновений в пространстве переменных $\mathbf{R}_{\perp} = (X, Y)$, $v_{\parallel}$, $J$ (ось $z$ — вдоль магнитного поля), если теперь вместо компонент импульса ввести четыре переменные $g_k\{X, Y, v_{\parallel}, J\}$ и понимать под $\Delta g_1$, $\Delta g_2$, ... изменения этих величин при столкновениях.

Интеграл столкновений по-прежнему приводится к виду

$$\mathrm{St}\, f = -\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial s_k}{\partial g_k} = -\frac{\partial \mathbf{s}_{\perp}}{\partial \mathbf{R}_{\perp}} - \frac{\partial s_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{\partial s_J}{\partial J} \qquad (60,12)$$

(поток $\mathbf{s}_{\perp}$ по определению имеет компоненты только в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$); здесь существенно, что элемент объема в пространстве переменных $g_k$ сводится просто к произведению их дифференциалов; поэтому интеграл столкновений имеет вид обычной дивергенции. Вывод в § 41 требует лишь небольших изменений. Прежде всего, при записи (41,2) было уже учтено, что в силу сохранения импульса $\Delta\mathbf{p} \equiv \mathbf{q} = -\Delta\mathbf{p}'$. Для рассматриваемых дрейфовых переменных такого соотношения, разумеется, нет. Повторив вывод без этого предположения, найдем (скажем, для столкновений электронов с ионами)

$$s_k^{(ei)} = \sum_{l=1}^{4} \frac{1}{2} \int \left\{ \langle \Delta g_{ek} \Delta g_{el} \rangle f_i \frac{\partial f_e}{\partial g_{el}} + \right.$$
$$\left. + \langle \Delta g_{ek} \Delta g_{il} \rangle f_e \frac{\partial f_i}{\partial g_{il}} \right\} d^3 p_i, \qquad (60,13)$$

где $d^3p_i = 2\pi M^3 dJ_i dv_{i\parallel}$, $\Delta g_k$ — изменение величин $g_k$ при столкновении, а угловые скобки означают усреднение по столкновениям.

При выводе (60,13) существенно использована также возможность переставить в интеграле столкновений начальное и конечное состояния, после чего становится очевидным сокращение линейных по $\Delta g_k$ членов; кроме того, это позволяет производить интегрирование по всему $g$-пространству. В § 41 такое преобразование было сделано в силу симметрии по отношению к обращению времени, связывающей вероятности прямого и обратного столкновений. При наличии магнитного поля такая симметрия имеет место только при условии изменения направления поля $\mathbf{B}$ на обратное, так что она связывает вероятности столкновения по существу в различных полях. Однако, мы увидим ниже, что в данном случае симметрия относительно обращения времени восстанавливается интегрированием по прицельным параметрам.

Наконец, в (60,13) использовано, что взаимное рассеяние «кружков» имеет место лишь при их прохождении на расстояниях друг от друга, не превосходящих радиуса экранирования $a$. Предполагая, что функция распределения мало меняется на таких расстояниях, мы положили приближенно $f_i(\mathbf{R}_i, v_{i\parallel}, J_i) \approx \approx f_i(\mathbf{R}_e, v_{i\parallel}, J_i)$ и произвели интегрирование по $d^3R_i$. В результате в (60,13) осталось лишь интегрирование по $d^3p_i$, а усреднение по столкновениям включает в себя интегрирование по положениям $\mathbf{R}_i$. Ниже в конкретных случаях это усреднение будет выражено с помощью соответствующего сечения рассеяния. Сейчас укажем лишь, что средние значения $\langle \Delta\mathbf{R}_\perp \Delta J\rangle$, $\langle \Delta\mathbf{R}_\perp \Delta v_\parallel\rangle$ равны нулю. Это видно из того, что произведения $\Delta X \Delta J$, $\Delta Y \Delta J$ (и такие же с $\Delta v_\parallel$ вместо $\Delta J$) образуют вектор в плоскости $xy$. Поскольку для ларморовских кружков не существует в этой плоскости каких-либо выделенных направлений, указанный вектор должен обратиться в нуль при усреднении.

Важное свойство интеграла столкновений в дрейфовых переменных состоит в том, что его добавление к кинетическому уравнению изменяет выражение для потока частиц (в обычном пространстве!) через функцию распределения. Чтобы убедиться в этом, запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{V} f_e)}{\partial \mathbf{R}_\perp} + \frac{\partial}{\partial v_\parallel}(\dot{v}_\parallel f_e) = -\frac{\partial \mathbf{s}_{e\perp}}{\partial \mathbf{R}_\perp} - \frac{\partial s_{e\parallel}}{\partial v_\parallel} - \frac{\partial s_{eJ}}{\partial J} \qquad (60,14)$$

(ввиду предполагаемого постоянства $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ можно ввести $\mathbf{V}$ под знак производной). Проинтегрировав это уравнение по $d^3p$, получим

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{R}} \int (\mathbf{V} f_e + \mathbf{s}_{e\perp})\, d^3p = 0, \quad N_e = \int f_e d^3p \qquad (60,15)$$

(индекс $e$ у электронных переменных для краткости опускаем); $N_e$ — пространственная плотность числа кружков; выражение под знаком $\mathrm{div}_{\mathbf{R}}$ есть, следовательно, плотность потока этих кружков. Мы видим, что к обычному выражению $\int \mathbf{V} f_e d^3p$ добавляется еще связанный со столкновениями член $\int \mathbf{s}_{e\perp} d^3p$. Этот член представляет собой по существу диффузионный поток в поперечном к магнитному полю направлении. При таком описании (в отличие от обычного описания диффузии) он входит непосредственно в кинетическое уравнение.

При использовании этих выражений следует, конечно, учитывать, что плотность электрического тока связана с потоком истинных частиц, а не кружков. Поток частиц согласно (60,9) отличается от потока кружков членом с ротором, описывающим намагниченность. Окончательное выражение для плотности тока электронов имеет поэтому вид

$$\mathbf{j}_e = -e\int \mathbf{V} f_e d^3p - \frac{mc}{B}\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{b}\int f_e J\, d^3p\right) - \int e\mathbf{s}_{e\perp} d^3p. \quad (60,16)$$

Выражение (60,13) приобретает реальный смысл лишь после вычисления фигурирующих в нем средних значений. Покажем, как это делается на примере электронного интеграла для электрон-ионных столкновений.

Вычисления производятся различным образом в двух областях значений прицельных параметров $\rho$, определяемых неравенствами:

$$\mathrm{I})\ \rho \ll r_{Be}, \quad \mathrm{II})\ r_{Be} \ll \rho \ll a. \quad (60,17)$$

Заметим, что интегрирования по параметру $\rho$ будут, как обычно при кулоновском рассеянии, иметь логарифмический характер. С логарифмической точностью можно не делать различия между сильными ($\gg$) и слабыми ($>$) неравенствами. Поэтому области (60,17) перекрывают по существу весь интервал изменения прицельного параметра (в соответствии с (60,1) предполагается, конечно, что $r_{Be} \ll a$). Для существования области I необходимо также, чтобы было

$$r_{Be} \gg \rho_{\min} = ze^2/mv_{Te}^2, \quad (60,18)$$

где $\rho_{\min}$ — прицельное расстояние, на котором угол рассеяния делается $\sim 1$ (мы рассматриваем здесь только квазиклассический случай $e^2/\hbar v_{Te} \gg 1$).

В то же время будем считать, что $r_{Bi} \gtrsim a$. Тогда для всех прицельных параметров $\rho \lesssim a$ влияние магнитного поля на движение ионов (в процессе столкновения) несущественно: траектория иона мало искривляется полем на расстояниях $\sim\rho$. При этом можно пренебречь (в пределе $m/M\to 0$) отдачей ионов, т. е. положить равными нулю изменения всех характеризующих его переменных $R_\perp$, $v_{||}$, $J$ [1]). Тогда в (60,13) исчезает второй член в фигурных скобках, так что электрон-ионная часть электронного тока принимает вид

$$s_\alpha^{(ei)}=-\frac{N_i}{2}\langle\Delta X_\alpha\Delta X_\beta\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial X_\beta} \qquad (60,19)$$

Величины $\langle\Delta X_\alpha\Delta X_\beta\rangle$ составляют пространственный тензор, поперечный к направлению поля. Представим его в виде

$$\langle\Delta X_\alpha\Delta X_\beta\rangle=\frac{1}{2}\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle(\delta_{\alpha\beta}-b_\alpha b_\beta), \qquad (60,20)$$

выражающем эту поперечность явным образом. Поток же (60,19) запишется тогда как

$$\mathbf{s}^{(ei)}=-\frac{N_i}{4}\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle^{(ei)}\nabla_\perp f_e, \qquad (60,21)$$

где $\nabla_\perp=\nabla_\mathbf{R}-\mathbf{b}(\mathbf{b}\nabla_\mathbf{R})$ — оператор дифференцирования в поперечных к $\mathbf{b}$ направлениях.

Аналогичные (60,19) выражения для «скоростных потоков»:

$$\begin{aligned} s_{||}^{(ei)}&=-\frac{N_i}{2}\left\{\langle(\Delta v_{||})^2\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial v_{||}}+\langle\Delta v_{||}\Delta J\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial J}\right\},\\ s_J^{(ei)}&=-\frac{N_i}{2}\left\{\langle\Delta v_{||}\Delta J\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial v_{||}}+\langle(\Delta J)^2\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial J}\right\}. \end{aligned} \qquad (60,22)$$

В равновесии, т. е. для максвелловского распределения

$$f_e=\text{const}\cdot\exp\left\{-\frac{m}{T}\left(\frac{v_{||}^2}{2}+J\right)\right\}, \qquad (60,23)$$

интеграл столкновений должен обращаться в нуль. Подставив (60,23) в (60,22) и приравняв потоки нулю, найдем

$$\langle\Delta v_{||}\Delta J\rangle^{(ei)}=-v_{||}\langle(\Delta v_{||})^2\rangle^{(ei)}=-\frac{1}{v_{||}}\langle(\Delta J)^2\rangle^{(ei)}. \qquad (60,24)$$

Вычислим сначала вклад от области I. В этой области можно считать, что магнитное поле вообще не сказывается на процессе рассеяния, поскольку на таких расстояниях не искривляется заметным образом траектория не только иона, но и электрона. Естественной переменной для описания столкновения является

[1]) Этого нельзя сделать, если существуют прицельные параметры, для которых $a\gg\rho\gg r_{Bi}$. При таких столкновениях ион дрейфует в поле электрона и его большая масса не проявляется.

при этом обычный импульс электрона $\mathbf{p}$, через который и надо выразить дрейфовые переменные. Согласно (60,3—4), (60,8) имеем

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}-\frac{1}{m\omega_{Be}}[\mathbf{b}\mathbf{p}_\perp], \quad v_{||}=\frac{p_{||}}{m}, \quad J=\frac{p_\perp^2}{2m^2}.$$

Имея в виду, что координаты частицы $\mathbf{r}$ (в отличие от координат центра орбиты $\mathbf{R}$!) не меняются при столкновении, находим отсюда

$$\Delta\mathbf{R}_\perp=\frac{1}{m\omega_{Be}}[\mathbf{b}\mathbf{q}_\perp], \quad \Delta v_{||}=\frac{q_{||}}{m}, \quad \Delta J=\frac{1}{m^2}\mathbf{p}_\perp\mathbf{q}_\perp, \tag{60,25}$$

где $\mathbf{q}$ — малое изменение импульса $\mathbf{p}$.

Отмечая индексом I вклад от рассматриваемой категории столкновений, пишем теперь

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\mathrm{I}}^{(ei)}=\int(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2 v\,d\sigma=\frac{1}{m^2\omega_{Be}^2}\int q_\perp^2 v\,d\sigma, \tag{60,26}$$

где $d\sigma$ — сечение рассеяния электрона на неподвижном ионе. Взяв последнее из (41,6) и произведя интегрирование, получим

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\mathrm{I}}^{(ei)}=\frac{8\pi z^2e^4L_{\mathrm{I}}}{m^2\omega_{Be}^2 v}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2}, \tag{60,27}$$

где $\theta$ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$, а

$$L_{\mathrm{I}}=\ln\frac{mr_{Be}v_{Te}^2}{ze^2}=\ln\frac{mv_{Te}^3}{ze^2\omega_{Be}} \tag{60,28}$$

— кулоновский логарифм, «обрезанный» сверху на прицельных расстояниях $\rho\sim r_{Be}$ (верхняя граница области I). Наконец, выразив этот результат через дрейфовые переменные, окончательно находим

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\mathrm{I}}^{(ei)}=\frac{8\pi z^2e^2c^2L_{\mathrm{I}}}{B^2}\,\frac{v_{||}^2+J}{\left(v_{||}^2+2J\right)^{3/2}}. \tag{60,29}$$

Аналогичное вычисление дает

$$\langle\Delta v_{||}\Delta J\rangle_{\mathrm{I}}^{(ei)}=-\frac{8\pi z^2e^4L_{\mathrm{I}}}{m^2}\,\frac{Jv_{||}}{\left(v_{||}^2+2J\right)^{3/2}}, \tag{60,30}$$

а оставшиеся две величины определяются из (60,24).

Обратимся к области II. Здесь естественными являются именно дрейфовые переменные и столкновение описывается как дрейфовое отклонение кружка, летящего в направлении $\mathbf{b}$ (ось $z$)

в кулоновском поле неподвижного иона. При дрейфе скорость $v_\perp$, а значит, и $J$ не меняются; в силу закона сохранения энергии при рассеянии на тяжелом ионе, это в свою очередь приводит к сохранению $v_{\parallel}$. Поэтому область II не вносит вклада в величины (60,24).

Вклад же в $\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle$ вычисляется как

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\mathrm{II}}^{(ei)} = \int (\Delta\mathbf{R}_\perp)^2 |v_{\parallel}|\, d\sigma = \int (\Delta\mathbf{R}_\perp)^2 |v_{\parallel}|\, d^2\rho, \qquad (60,31)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — значение радиус-вектора центра кружка $\mathbf{R}_\perp$ до столкновения. Изменение $\mathbf{R}_\perp$ при пролете кружка в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ и постоянном электрическом поле $\mathbf{E} = ez\mathbf{R}/R^3$ (поле иона) определяется уравнением дрейфа

$$\frac{d\mathbf{R}_\perp}{dt} = \frac{c}{B}[\mathbf{bE}] = \frac{zec}{B}\frac{[\mathbf{bR}_\perp]}{\left(R_{\parallel}^2 + R_\perp^2\right)^{3/2}} \qquad (60,32)$$

(см. (60,6)). В первом приближении можно положить в правой стороне этого уравнения $\mathbf{R}_\perp \approx \boldsymbol{\rho}$, $R_{\parallel} = v_{\parallel}t$. Полное изменение $\mathbf{R}_\perp$ при столкновении получается интегрированием (60,32) по $t$ от $-\infty$ до $\infty$ и равно

$$\Delta\mathbf{R}_\perp = \frac{2zec}{B|v_{\parallel}|}\frac{[\mathbf{b}\boldsymbol{\rho}]}{\rho^2}. \qquad (60,33)$$

Подставив это выражение в (60,31) и произведя интегрирование (с логарифмической точностью, отвечающей границам области II), найдем

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\mathrm{II}}^{(ei)} = \frac{8\pi z^2e^2c^2L_{\mathrm{II}}}{B^2|v_{\parallel}|}, \quad L_{\mathrm{II}} = \ln\frac{a}{r_{Be}}. \qquad (60,34)$$

Вклады (60,29) и (60,34) имеют, вообще говоря, одинаковый порядок величины

$$N_i\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle \sim \nu_{ei}r_{Be}^2,$$

где $\nu_{ei}$ — средняя частота электрон-ионных столкновений. Особенность вклада (60,34) состоит, однако, в том, что он обращается в бесконечность при $v_{\parallel} \to 0$ вне зависимости от значения $v_\perp$. Физический смысл этой расходимости состоит в том, что при малой скорости $v_{\parallel}$ кружок долго находится в поле иона и за это время дрейф уносит его на большое расстояние.

В действительности, конечно, формула (60,34) становится неприменимой при малых $v_{\parallel}$ по ряду причин: 1) если $r_{Bi} \gg a$, то при $|v_{\parallel}| \ll v_{Ti}$ за время столкновения ион может уйти от электрона; этот механизм «обрезает» расходимость при $|v_{\parallel}| \sim v_{Ti}$; 2) при выводе формулы во всяком случае подразумевается, что $|\Delta\mathbf{R}_\perp| \ll \rho$; 3) кружок может уйти от данного иона за счет дрейфа в поле других частиц (тройное столкновение).

Написанные формулы решают вопрос о составлении кинетического уравнения в дрейфовом приближении. Оно позволяет, в частности, находить кинетические коэффициенты плазмы в первом неисчезающем по $1/B$ приближении (см. задачу 1).

Наконец, осталось объяснить, каким образом интегрирование по $d^2\rho$ формально восстанавливает симметрию по отношению к обращению времени, что уже было использовано при записи (60,13). Нарушение этой симметрии проявляется в изменении знака отклонения $\Delta\mathbf{R}_\perp$ в (60,33) при изменении направления $\mathbf{B}$ на обратное. Прежний знак можно восстановить, однако, произведя замену переменной интегрирования $\rho \to -\rho$, так что изменение знака $\mathbf{B}$ в этом приближении нигде сказаться не может (в области же I магнитное поле вообще не влияет на процесс рассеяния).

### Задачи

1. В дрейфовом приближении определить коэффициент Холла $\mathcal{R}$ и поперечную проводимость $\sigma_\perp$ плазмы (*С. Т. Беляев*, 1955).

Решение. Рассматривая плазму с градиентом плотности электронов (в отсутствие электрического поля и градиента температуры), полагаем функцию распределения $f_e$ в (60,16) и (60,21) максвелловской и находим

$$\mathbf{j}=\frac{cT}{B}[\mathbf{b}\nabla N_e]+eD_\perp\nabla_\perp N_e,$$

причем коэффициент поперечной диффузии

$$D_\perp=\frac{N_i}{4}\overline{\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle},$$

где черта означает усреднение по максвелловскому распределению электронов. Сравнив с общим выражением (58,13), находим в первом по $1/B$ приближении прежнее выражение (59,8) для $\mathcal{R}$. В следующем приближении получаем

$$\sigma_\perp=T/e^2N_e\mathcal{R}^2B^2D_\perp. \tag{1}$$

В области II (см. (60,17)) берем $\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle$ из (60,34). С логарифмической точностью имеем

$$\overline{|v_\parallel|^{-1}}=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{mv_\parallel^2}{2T}\right)\frac{dv_\parallel}{|v_\parallel|}\approx 2\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\ln\frac{v_{Te}}{v_{\min}},$$

где $v_{\min}$ определяется одним из указанных в конце параграфа механизмов. Положив, например, $v_{\min}\sim v_{Ti}$, получим в результате

$$D_\perp^{\mathrm{II}}=\frac{(2\pi m)^{1/2}z^2e^2c^2N_i}{T^{1/2}B^2}\ln\frac{M}{m}\ln\frac{a}{r_{Be}}. \tag{2}$$

Аналогичным образом, взяв $\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle$ из (60,27), получим вклад в коэффициент диффузии от области I:

$$D_\perp^{\mathrm{I}}=\frac{4(2\pi m)^{1/2}z^2e^2c^2N_i}{3T^{1/2}B^2}\ln\frac{mv_{Te}^3}{ze^2\omega_{Be}}. \tag{3}$$

Если считать, что выполняется неравенство (59,10), обратное к (60,1), то область II отсутствует, а логарифм в (3) заменяется его обычным кулоновским значением (41,10). В таком случае подстановка (3) в (1) приводит к формуле (59,15) для $\sigma_\perp$.

2. Определить коэффициент поперечной диффузии $D_\perp$ для столкновений электронов с нейтральными атомами.

Решение. Ввиду короткодействующего характера взаимодействия электрона с атомами имеется только область I, где под $a$ следует понимать размер атома[1]). Остается справедливой и формула (60,26). В нее, однако, нужно теперь подставить сечение рассеяния электрона на нейтральном атоме. После интегрирования по углам $D_\perp$ выражается через транспортное сечение этого рассеяния $\sigma_t$:

$$D_\perp=\frac{N_a}{4}\overline{\langle(\Delta R_\perp)^2\rangle}=\frac{N_a}{2\omega_{Be}^2}\overline{v^3\sigma_t}$$

($N_a$ — плотность числа атомов). Для независящего от скорости электрона сечения $\sigma_t$ получаем после усреднения по максвелловскому распределению:

$$D_\perp=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2}\frac{N_a\sigma_t}{\omega_{Be}^2}.$$

---

[1]) Может возникнуть сомнение в применимости интеграла столкновений (60,12) для рассеяния на короткодействующем потенциале, происходящего, разумеется, на углы порядка единицы. Легко видеть, однако, что в данной задаче требуется лишь малость изменений положения центра орбиты, $\Delta R_\perp \sim r_{Be}$, по сравнению с характерными расстояниями, на которых меняется концентрация электронов, что соответствует условию применимости уравнения поперечной диффузии (ср. конец § 59).