ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

§ 61. Пучковая неустойчивость

Согласно результатам § 34, амплитуда возмущения с волновым вектором **k** в однородной неограниченной среде ведет себя асимптотически при $t \to \infty$ как

$$e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \tag{61,1}$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — частота волн, распространяющихся в среде. В частности, для продольных волн в плазме частоты $\omega(\mathbf{k})$ — корни уравнения [1])

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 0. \tag{61,2}$$

Частоты $\omega(\mathbf{k})$, вообще говоря, комплексны. Если мнимая часть $\operatorname{Im}\omega \equiv -\gamma < 0$, то возмущение затухает со временем. Если же в некотором интервале значений **k** имеем $\gamma < 0$, то такие возмущения возрастают — среда неустойчива по отношению к колебаниям в этом интервале длин волн; величину $|\gamma|$ называют в таком случае *инкрементом неустойчивости*. Сразу же подчеркнем, что, говоря о «неограниченном» возрастании возмущения (по закону $\exp(|\gamma|t)$), мы всегда, здесь и ниже, имеем в виду лишь поведение в линейном приближении; в действительности, разумеется, возрастание ограничено нелинейными эффектами.

В бесстолкновительной плазме мнимая часть частоты возникает в силу затухания Ландау. Термодинамически равновесное состояние плазмы, отвечая абсолютному максимуму энтропии, устойчиво по отношению к любому возмущению. В § 30 было уже отмечено, однако, что для неравновесных распределений в плазме поглощение энергии колебаний может смениться их усилением. Это проявляется в появлении области значений независимых переменных **k** и ω ($\omega > 0$), в которой мнимая часть диэлектрической проницаемости отрицательна: $\varepsilon_l''(\omega, \mathbf{k}) < 0$. Подчеркнем, однако, что наличие таких областей само по себе еще не означает обязательно неустойчивости плазмы (во всяком случае, в линейном приближении); необходимо еще, чтобы в эту область фактически попадала какая-либо из ветвей спектра плазменных колебаний.

---

[1]) Напомним, что в случае анизотропной плазмы это дисперсионное уравнение относится к квазипродольным «медленным» волнам — см. § 32.

Характерный пример неустойчивости представляет направленный пучок электронов, проходящих через неподвижную плазму (*А. И. Ахиезер*, *Я. Б. Файнберг*, 1949; *D. Bohm*, *E. P. Gross*, 1949). Пучок предполагается электрически компенсированным: сумма электронных плотностей зарядов в плазме и пучке равна ионной плотности зарядов плазмы. Система однородна и неограничена, т. е. пучок (как и неподвижная плазма) заполняет все пространство, причем его направленная скорость **V** везде одинакова. Скорость **V** будем считать нерелятивистской.

Предположим сначала, что как пучок, так и плазма — холодные, т. е. можно пренебречь тепловым движением их частиц; необходимое для этого условие выяснится ниже.

В области частот электронных колебаний продольная диэлектрическая проницаемость системы плазмы-пучок имеет вид

$$\varepsilon_l(\omega,\ \mathbf{k})-1=-\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}-\frac{\Omega_e'^2}{(\omega-\mathbf{kV})^2}. \tag{61,3}$$

Первый член справа отвечает неподвижной плазме, $\Omega_e = (4\pi e^2 N_e/m)^{1/2}$ есть соответствующая электронная плазменная частота. Второй член обязан электронам пучка. В системе отсчета K', движущейся вместе с пучком, вклад его электронов в ε_l-1 равен $-(\Omega_e'/\omega')^2$, где ω' — частота колебаний в этой системе, а $\Omega_e'=(4\pi e^2 N_e'/m)^{1/2}$ (N_e' — плотность электронов в пучке). При переходе к исходной системе отсчета K частота ω' заменяется на

$$\omega'=\omega-\mathbf{kV} \tag{61,4}$$

и мы приходим к выражению (61,3)[1]).

Будем считать плотность пучка малой в том смысле, что

$$N_e' \ll N_e, \tag{61,5}$$

так что и $\Omega_e' \ll \Omega_e$. Тогда наличие пучка лишь незначительно меняет основную ветвь спектра продольных колебаний плазмы — тот корень дисперсионного уравнения $\varepsilon_l=0$, для которого $\omega \approx \Omega_e$. Но наряду с этой ветвью появляется еще и новая ветвь, связанная с наличием пучка; она-то нас здесь и интересует.

Чтобы член с малым числителем $\Omega_e'^2$ не выпадал из дисперсионного уравнения

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}+\frac{\Omega_e'^2}{(\omega-\mathbf{kV})^2}=1, \tag{61,6}$$

---

[1]) Закон преобразования частоты легко получить путем преобразования фазового множителя волны. Радиус-вектор точки в системе K': $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{V}t$. Поэтому

$$\mathbf{kr}-\omega t=\mathbf{kr}'-(\omega-\mathbf{kV})\,t=\mathbf{kr}'-\omega' t.$$

эта малость должна компенсироваться малостью знаменателя. Поэтому ищем решение в виде $\omega = \mathbf{kV} + \delta$ с малым δ. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\Omega_e^2}{(\mathbf{kV})^2} + \frac{\Omega_e'^2}{\delta^2} = 1, \tag{61,7}$$

откуда

$$\delta = \pm \frac{\Omega_e'}{[1-(\Omega_e/\mathbf{kV})^2]^{1/2}}, \tag{61,8}$$

причем условие $\delta \ll \mathbf{kV}$ требует, чтобы $|\mathbf{kV}|$ было не слишком близко к Ω_e. Предположение же о холодности плазмы требует соблюдения условия $kv_{Te} \ll \omega$ и в данном случае означает, следовательно, что должно быть $v_{Te} \ll V$ — скорость пучка велика по сравнению с тепловой скоростью электронов плазмы.

Если $(\mathbf{kV})^2 > \Omega_e^2$, то оба корня (61,8) вещественны и колебания не нарастают. Если же

$$(\mathbf{kV})^2 < \Omega_e^2, \tag{61,9}$$

оба значения δ мнимы; то из них, в котором $\operatorname{Im}\omega = \operatorname{Im}\delta > 0$, отвечает нарастающим колебаниям. Таким образом, система неустойчива по отношению к колебаниям с достаточно малыми значениями $\mathbf{kV}$.

Другая ситуация возникает при учете теплового движения электронов в плазме. В общем случае вместо (61,3) будем иметь

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l^{(\text{пл})}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - \mathbf{kV})^2}, \tag{61,10}$$

где $\varepsilon_l^{(\text{пл})}$ относится к плазме без пучка. Решая уравнение $\varepsilon_l = 0$ тем же способом, найдем теперь

$$\delta = \pm \frac{\Omega_e'}{[\varepsilon_l^{(\text{пл})}(\mathbf{kV}, \mathbf{k})]^{1/2}}. \tag{61,11}$$

Но в силу затухания Ландау функция $\varepsilon_l^{(\text{пл})}$ имеет мнимую часть всегда (при любом $\mathbf{k}$). Тем самым всегда будет комплексным и δ, причем в силу двойного знака в (61,11) для одной из ветвей колебаний будет $\operatorname{Im}\delta > 0$, т. е. эти колебания неустойчивы. При переходе к большим $\mathbf{V}$, отвечающим рассмотренному выше случаю холодной плазмы, связанная с затуханием Ландау часть $\operatorname{Im}\varepsilon_l$ становится экспоненциально малой и мы возвращаемся к (61,8).

В изложенных рассуждениях пренебрегалось тепловым разбросом скоростей электронов в пучке. Это пренебрежение оправдано, если величина этого разброса

$$v'_{Te} \ll |\delta|/k. \tag{62,12}$$

Задачи

1. Определить границу области неустойчивости пучка в холодной плазме со стороны значений $\mathbf{kV}$, близких к Ω_e.

Решение. При малых значениях разности $(\mathbf{kV})^2-\Omega_e^2$ точность уравнения (61,7) недостаточна. Сохранив в уравнении $\varepsilon_l=0$ (с ε_l из (61,3)) также и член следующего порядка по δ, получим

$$\frac{\Omega_e'^2}{\delta^2}\approx 1-\frac{\Omega_e^2}{(\mathbf{kV})^2}+\frac{2\Omega_e^2\delta}{(\mathbf{kV})^3}\approx\frac{2(\mathbf{kV}-\Omega_e)}{\Omega_e}+\frac{2\delta}{\Omega_e}.$$

Введя новые величины ξ и τ согласно

$$\delta=\xi\left(\frac{1}{2}\Omega_e'\Omega_e^2\right)^{1/3},\quad \tau=\left(\frac{2}{\Omega_e'\Omega_e^2}\right)^{1/3}(\mathbf{kV}-\Omega_e),$$

перепишем это уравнение в виде

$$\xi^3+\tau\xi=1$$

(для определенности считаем, что $\mathbf{kV}$ близко к $+\Omega_e$, а не к $-\Omega_e$). Все три корня уравнения (1) вещественны при $\tau>3\cdot 2^{-2/3}$, чем и определяется область устойчивости. Два из этих корней соответствуют двум корням уравнения (61,6), а третий—близкой к ним при $\Omega_e\approx\mathbf{kV}$ частоте колебаний неподвижной плазмы.

2. При условии, обратном к (61,12), исследовать устойчивость пучка с тепловым разбросом скоростей.

Решение. В указанных условиях пучковая ветвь в спектре колебаний отсутствует. Что касается основной ветви плазменных колебаний, то наличие пучка малой плотности мало влияет на вещественную часть ее частоты, которая по-прежнему дается (при $kv_{Te}\ll\Omega_e$) формулой (32,5):

$$\omega=\Omega_e\left[1+\frac{3}{2}\left(\frac{kv_{Te}}{\Omega_e}\right)^2\right].$$

Декремент же затухания γ дается суммой декрементов от самой плазмы и от пучка. Согласно (31,7) имеем

$$\gamma=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left[-\frac{\omega\Omega_e^2}{(kv_{Te})^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right)-\frac{\Omega_e'^2(\omega-\mathbf{kV})}{(kv_{Te}')^3}\exp\left(-\frac{(\omega-\mathbf{kV})^2}{2k^2v_{Te}'^2}\right)\right].$$

Область неустойчивости определяется условием $\gamma(k)>0$. Для этого во всяком случае должно быть $\mathbf{kV}>\omega$. Наибольший инкремент будет при $\delta\equiv\mathbf{kV}-\omega\lesssim kv_{Te}'$. В этой области первый член в (1) экспоненциально мал (в силу $\Omega_e\gg kv_{Te}$) и им можно пренебречь (если только N_e' не слишком мало). Тогда инкремент γ будет даваться лишь вторым членом; отметим, что он пропорционален плотности пучка N_e'.

3. Исследовать устойчивость ионно-звуковых волн в двухтемпературной плазме ($T_e\gg T_i$), в которой электронная компонента движется относительно ионной с макроскопической скоростью $\mathbf{V}$, причем $V\ll v_{Te}$.

Решение. При условии $V\ll v_{Te}$ направленное движение электронов мало сказывается на законе дисперсии ионно-звуковых волн, который будет по-прежнему даваться формулой (33,4):

$$\frac{\omega}{k}=\left(\frac{zT_e}{M}\right)^{1/2}\frac{1}{(1+k^2a_e^2)^{1/2}}. \qquad (1)$$

Декремент же затухания (его электронная часть) получается из (33,6) заменой (61,4):

$$\gamma=(\mathbf{kV}-\omega)\left(\frac{\pi zm}{8M}\right)^{1/2}. \qquad (2)$$

Условие неустойчивости: $\mathbf{kV}>\omega$; для этого во всяком случае должно быть $V>\omega/k$. Вблизи границы неустойчивости множитель $\mathbf{kV}-\omega$ в (2) мал, и тогда может оказаться необходимым учет в γ также и ионной части затухания, которая в обычных условиях мала.

§ 62. Абсолютная и конвективная неустойчивость

Наличие у дисперсионного уравнения корней в верхней ω-полуплоскости означает, что малое начальное возмущение в виде плоской волны возрастает, т. е. система неустойчива по отношению к такому возмущению. Реально, однако, всякое начальное возмущение представляет собой «волновой пакет» конечных размеров в пространстве, и плоские волны представляют собой лишь его отдельные фурье-компоненты. С течением времени пакет «расплывается», а его амплитуда (в неустойчивой системе) возрастает. В то же время, однако, как и всякий волновой пакет, он будет перемещаться в пространстве. Здесь могут иметь место два случая.

В одном случае, несмотря на перемещение пакета, возмущение неограниченно возрастает в любой точке пространства; такую неустойчивость называют *абсолютной*. В другом случае пакет сносится так быстро, что в каждой фиксированной точке пространства возмущение стремится при $t\rightarrow\infty$ к нулю; такую неустойчивость называют *конвективной*.

Сразу же подчеркнем, что это различие относительно в том смысле, что характер неустойчивости всегда определяется по отношению к той или иной системе отсчета и переход от одной системы к другой может изменить этот характер: конвективная в некоторой системе неустойчивость становится абсолютной в системе, движущейся «вместе с пакетом», а абсолютная неустойчивость становится конвективной в системе, достаточно быстро «уходящей» от пакета.

Это обстоятельство, однако, отнюдь не лишает физического смысла различие между двумя типами неустойчивости. В реальных постановках задачи всегда существует выделенная с экспериментальной точки зрения система отсчета, относительно которой и следует рассматривать неустойчивость. Допустимость рассмотрения физической системы, как бесконечно протяженной, не исключает того факта, что реально она имеет границы (например, стенки), которые и служат «лабораторной системой отсчета». Более того, фактическая ограниченность системы может приводить к тому, что при конвективной неустойчивости возмущение может вообще не