Декремент же затухания (его электронная часть) получается из (33,6) заменой (61,4):

$$\gamma = (\mathbf{k}\mathbf{V} - \omega)\left(\frac{\pi z m}{8M}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Условие неустойчивости: $\mathbf{k}\mathbf{V} > \omega$; для этого во всяком случае должно быть $V > \omega/k$. Вблизи границы неустойчивости множитель $\mathbf{k}\mathbf{V} - \omega$ в (2) мал, и тогда может оказаться необходимым учет в γ также и ионной части затухания, которая в обычных условиях мала.

§ 62. Абсолютная и конвективная неустойчивость

Наличие у дисперсионного уравнения корней в верхней ω-полуплоскости означает, что малое начальное возмущение в виде плоской волны возрастает, т. е. система неустойчива по отношению к такому возмущению. Реально, однако, всякое начальное возмущение представляет собой «волновой пакет» конечных размеров в пространстве, и плоские волны представляют собой лишь его отдельные фурье-компоненты. С течением времени пакет «расплывается», а его амплитуда (в неустойчивой системе) возрастает. В то же время, однако, как и всякий волновой пакет, он будет перемещаться в пространстве. Здесь могут иметь место два случая.

В одном случае, несмотря на перемещение пакета, возмущение неограниченно возрастает в любой точке пространства; такую неустойчивость называют *абсолютной*. В другом случае пакет сносится так быстро, что в каждой фиксированной точке пространства возмущение стремится при $t \to \infty$ к нулю; такую неустойчивость называют *конвективной*.

Сразу же подчеркнем, что это различие относительно в том смысле, что характер неустойчивости всегда определяется по отношению к той или иной системе отсчета и переход от одной системы к другой может изменить этот характер: конвективная в некоторой системе неустойчивость становится абсолютной в системе, движущейся «вместе с пакетом», а абсолютная неустойчивость становится конвективной в системе, достаточно быстро «уходящей» от пакета.

Это обстоятельство, однако, отнюдь не лишает физического смысла различие между двумя типами неустойчивости. В реальных постановках задачи всегда существует выделенная с экспериментальной точки зрения система отсчета, относительно которой и следует рассматривать неустойчивость. Допустимость рассмотрения физической системы, как бесконечно протяженной, не исключает того факта, что реально она имеет границы (например, стенки), которые и служат «лабораторной системой отсчета». Более того, фактическая ограниченность системы может приводить к тому, что при конвективной неустойчивости возмущение может вообще не успеть развиться, прежде чем пакет будет «вынесен» за границы системы (например, при течении жидкости по трубе).

Излагаемая ниже теория, позволяющая установить критерий различения обоих типов неустойчивости, имеет очень общий характер[1]). Речь может идти о любой вообще однородной и бесконечной (хотя бы в одном направлении — ось x) системе. Поэтому мы не будем конкретизировать здесь природу среды и возмущения в ней, обозначая последнее как некоторое $\psi(t, \mathbf{r})$. При этом мы ограничимся случаем одномерного пакета. Если речь идет о трехмерной системе, то это значит, что рассматриваются возмущения вида

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \psi(t, x)\, e^{i(k_y y + k_z z)},$$

с заданными значениями k_y, k_z.

Представим $\psi(t, x)$ в виде одностороннего разложения Фурье по времени — от $t=0$ (момент возникновения возмущения) до $t=\infty$. Компоненту такого разложения обозначим посредством $\varphi(\omega, x)$:

$$\varphi(\omega, x) = \int_0^\infty \psi(t, x)\, e^{i\omega t}\, dt. \qquad (62,1)$$

В дальнейшем нам придется рассматривать возмущения, возрастающие при $t \to \infty$. Мы будем предполагать (как это фактически имеет место), что это возрастание происходит не быстрее, чем по некоторому экспоненциальному закону $\exp(\sigma_0 t)$. Тогда интеграл (62,1) можно сделать сходящимся, считая ω комплексной величиной с $\operatorname{Im}\omega = \sigma > \sigma_0$. В этой области $\varphi(\omega, x)$ как функция комплексной переменной ω не имеет особенностей. В области же $\operatorname{Im}\omega < \sigma_0$ функцию $\varphi(\omega, x)$ следует понимать в смысле аналитического продолжения; здесь она, разумеется, имеет особенности.

Обратное выражение для функции $\psi(t, x)$ через ее фурье-образ имеет вид

$$\psi(t, x) = \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} e^{-i\omega t} \varphi(\omega, x) \frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (62,2)$$

причем $\sigma > \sigma_0$, так что путь интегрирования в (62,2) (будем называть его ω-контуром) проходит в верхней полуплоскости ω выше всех особых точек функции $\varphi(\omega, x)$.

Функцию $\varphi(\omega, x)$ в свою очередь разложим в интеграл Фурье

---

[1]) Такой критерий был установлен впервые *Стэрроком* (*P. A. Sturrok*, 1958). Излагаемая ниже формулировка критерия принадлежит *Бриггсу* (*R. J. Briggs*, 1964), которому мы в основном и следуем в §§ 62—64.

по координате x:

$$\varphi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\omega k}^{(+)} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \tag{62,3}$$

(опускаем для краткости индекс у k_x).

Функция $\psi_{\omega k}^{(+)}$ получается в каждом конкретном случае путем решения линеаризованных «уравнений движения» исследуемой системы и имеет вид

$$\psi_{\omega k}^{(+)} = \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)}, \tag{62,4}$$

где $g_{\omega k}$ определяется начальным возмущением, а функция $\Delta(\omega, k)$ характерна для системы как таковой (так, для плазмы роль «уравнения движения» играет кинетическое уравнение, $\Delta(\omega, k)$ оказывается продольной диэлектрической проницаемостью плазмы, а $g_{\omega k}$ выражается через фурье-компоненту начального возмущения формулой (34,12)).

Будем считать, что $g_{\omega k}$ как функция комплексных переменных ω и k не имеет особенностей при конечных значениях этих переменных, т. е. является их целой функцией[1]). Все особые точки $\psi_{\omega k}^{(+)}$ совпадают тогда с особенностями множителя $1/\Delta(\omega, k)$. Равенство

$$\Delta(\omega, k) = 0 \tag{62,5}$$

представляет собой дисперсионное уравнение системы; его корни $\omega(k)$ определяют частоты колебаний с заданными (вещественными) значениями волнового вектора k. Как мы видели в § 34, именно эти частоты определяют асимптотический (при $t \to \infty$) закон изменения со временем фурье-компоненты возмущения с заданным значением k:

$$\psi_k(t) \sim e^{-i\omega(k)t} = e^{-i\omega'(k)t + \omega''(k)t}.$$

Если исходить из этого закона, то нахождение асимптотического закона изменения возмущения в заданной точке пространства требовало бы исследования интеграла

$$\psi(t, x) \sim \int e^{-i\omega'(k)t} e^{\omega''(k)t} e^{ikx} dk. \tag{62,6}$$

При наличии неустойчивости, когда в некоторой области значений k имеем $\omega''(k) > 0$, один из множителей в подынтегральном выражении при $t \to \infty$ неограниченно растет, а другой становится бесконечно быстро осциллирующей функцией; эти противоположные тенденции затрудняют оценку интеграла.

[1]) Для этого во всяком случае необходимо, чтобы начальный волновой пакет достаточно быстро (быстрее чем $\exp(-\alpha|x|)$) убывал в пространстве.

Вместо этого вернемся к выражению $\psi(t, x)$ в виде (62,2), до выполнения интегрирования по ω. Сместим ω-контур вниз до его «зацепления» за первую (наиболее высокую, т. е. с наибольшим ω'') особую точку функции $\varphi(\omega, x)$; пусть эта точка лежит при $\omega=\omega_c$ (как будет ясно из дальнейшего, ω_c не зависит от x). Очевидно, что асимптотическое значение интеграла определяется окрестностью именно этой точки, так что

$$\psi(t, x) \propto e^{-i\omega_c t} = \exp(-i\omega_c' t + \omega_c'' t). \tag{62,7}$$

Если $\omega_c''>0$, то возмущение растет в каждой фиксированной точке x, т. е. неустойчивость абсолютна. Если же $\omega_c''<0$, то в фиксированных точках возмущение стремится к нулю — неустойчивость конвективна. Искомый критерий сводится, таким образом, к определению ω_c.

Функция $\varphi(\omega, x)$ дается интегралом (62,3) с $\psi_{\omega k}^{(+)}$ из (62,4):

$$\varphi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}. \tag{62,8}$$

Поскольку, по предположению, $g_{\omega k}$ — целая функция k, то особенности подынтегрального выражения (как функции комплексного k) лежат в особых точках множителя $1/\Delta(\omega, k)$; обычно речь идет о полюсах — корнях $k(\omega)$ уравнения (62,5).

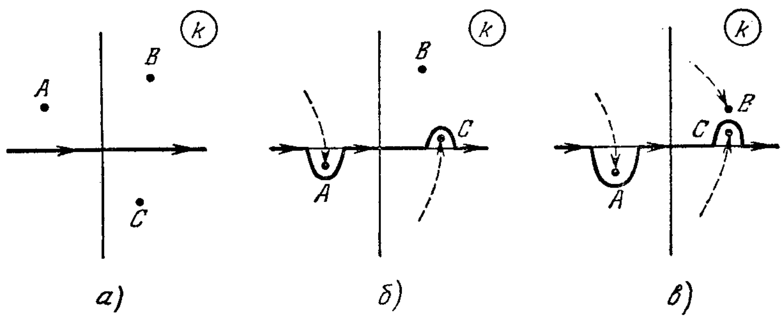

Рис. 22.

Пусть при некотором значении ω (точка на ω-контуре) с достаточно большой (положительной) мнимой частью $\omega''=\sigma$ особые точки лежат в k-плоскости, как показано на рис. 22,— некоторые в верхней, а другие в нижней полуплоскости. Путь интегрирования по k в (62,8) (назовем его k-контуром) проходит при этом вдоль вещественной оси. Будем теперь изменять ω, постепенно уменьшая ω''. Особые точки будут перемещаться (в k-плоскости) и при некоторых значениях ω могут достигнуть вещественной оси[1]). Эти значения ω не будут еще являться особыми для функции $\varphi(\omega, k)$: ничто не мешает сдвинуть k-контур таким образом, чтобы увести его из окрестности особых точек, пересекших вещественную ось (как это показано на рис. 22, *б*). Особенность интеграла возникает, однако, если две перемещающиеся особые точки сближаются, зажимая между собой путь интегрирования, и, таким образом, устраняют возможность увода этого пути из их окрестности (рис. 22, *в*).

Таким образом, значение ω, определяющее характер неустойчивости, отбирается из числа тех значений ω, при которых два корня $k(\omega)$ дисперсионного уравнения сливаются. При этом в рассмотрение входят только те случаи слияния, когда два корня сходятся с разных сторон k-контура; другими словами, при $\omega'' \to \infty$ эти корни должны лежать по разные стороны вещественной оси. Отметим, кстати, что поскольку значения ω_c определяются только свойствами функции $1/\Delta(\omega, k)$, то их независимость от x очевидна.

При слиянии двух простых корней уравнения возникает кратный (второго порядка) корень. Вблизи такого корня дисперсионное уравнение имеет вид

$$\Delta(\omega, k) \approx (\omega-\omega_c)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\right)_c + \frac{1}{2}(k-k_c)^2\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial k^2}\right)_c = 0, \qquad (62,9)$$

так что $k-k_c \sim \pm(\omega-\omega_c)^{1/2}$ [2]). Отметим, что в точке $\omega=\omega_c$ функция $\omega(k)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d\omega}{dk} = 0, \qquad (62,10)$$

т. е. ω_c является седловой точкой аналитической функции $\omega(k)$.

Интеграл (62,8), взятый по окрестности точки $k=k_c$, с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\varphi(\omega, x) \sim \frac{e^{ik_c x}}{\sqrt{\omega-\omega_c}}; \qquad (62,11)$$

функция $\varphi(\omega, x)$ имеет при $\omega=\omega_c$ корневой полюс. Интеграл же

---

[1]) В случае неустойчивой среды выход особой точки на вещественную ось k должен (хотя бы в некоторой области значений ω') произойти еще при $\omega'' > 0$, так как заведомо имеются такие корни уравнения $\Delta(\omega, k)=0$, для которых при вещественном k мнимая часть $\omega'' > 0$.

[2]) В некоторых случаях может иметь место слияние также и большего числа корней с возникновением корня более высокого порядка. Такие случаи, однако, могут, вообще говоря, отвечать лишь специальным значениям параметров системы, поскольку они накладывают дополнительные ограничения на точки ω_c, k_c: в разложении $\Delta(\omega, k)$ должны обращаться в нуль также и некоторые другие (помимо $(\partial\Delta/\partial k)_c$) коэффициенты.

(62,2), взятый теперь по окрестности точки $\omega=\omega_c$ как функция от t и x, имеет вид

$$\psi(t, x) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-i(\omega_c t - k_c x)} \qquad (62,12)$$

(поскольку это асимптотическое выражение получено при $t \to \infty$ и фиксированном x, оно справедливо лишь при $|k_c x| \ll |\omega_c t|$).

Хотя слияние корней дисперсионного уравнения является основным источником возникновения особенностей функции $\varphi(\omega, x)$ (и именно им определяется обычно характер неустойчивости), упомянем еще и другой тип особенностей, возникающий на частоте, для которой корень дисперсионного уравнения $|k| \to \infty$ [1]). Мнимая часть такой частоты ω_c, однако, фактически всегда отрицательна и потому заведомо не может привести к абсолютной неустойчивости (положительность ω_c'' означала бы в данном случае неустойчивость системы по отношению к колебаниям с бесконечно малой длиной волны). С таким случаем мы встретимся ниже (см. (63,10)).

Как уже подчеркивалось, неустойчивость, являющаяся конвективной в одной (лабораторной) системе отсчета, может стать абсолютной в другой системе. Поставим себе целью найти скорость V той системы отсчета, в которой неустойчивость абсолютна с максимальным инкрементом.

Переход от лабораторной системы к системе отсчета, движущейся со скоростью V, осуществляется заменой во всех формулах $\omega \to \omega - kV$. Как мы видели выше, значение ω_c отвечает тому моменту, когда по мере уменьшения ω'' на ω-контуре сливаются два полюса функции $1/\Delta(\omega, k)$ в k-плоскости, причем эти полюсы должны прийти к точке слияния с разных сторон вещественной оси, а потому один из них должен предварительно пересечь эту ось. Обозначим через ω''_{max} максимальное (не зависящее от V!) значение ω'' при вещественных значениях k. Поскольку $\omega''_c(k, V)$ заведомо меньше того значения ω'', при котором полюс пересек вещественную ось, то $\omega''_c(k, V) \leqslant \omega''_{max}$ при всех V. Это означает, что наибольшее значение ω''_c достигается, если слияние полюсов происходит на вещественной оси в точке максимума $\omega''(k)$. Заменив в (62,10) $\omega(k)$ на $\omega(k) - kV$ и отделяя мнимую и вещественную части равенства (при вещественных k), найдем два

---

[1]) Такой корень приводит к существенно особой точке функции $\varphi(\omega, x)$. Так, если $|k|$ стремится к бесконечности по закону $k^{-n} = C(\omega - \omega_c)$, то вклад от окрестности особенности в интеграл (62,8)

$$\varphi(\omega, x) \sim \exp\left\{\frac{ix}{[C(\omega-\omega_c)]^{1/n}}\right\}.$$

уравнения:

$$\frac{d\omega''}{dk} = 0, \tag{62,13}$$

$$V = \frac{d\omega'}{dk}. \tag{62,14}$$

Таким образом, наибольший инкремент неустойчивости дается максимальным значением $\omega''(k)$ как функции вещественного k. Скорость же системы отсчета, в которой такая неустойчивость имеет место, определяется соответствующим значением производной $d\omega'/dk$. Это значение V естественно принять в качестве определения групповой скорости волнового пакета в конвективно-неустойчивой среде.

§ 63. Усиление и непропускание

До сих пор мы рассматривали задачи об устойчивости, в которых речь шла о развитии во времени возмущения, заданного в пространстве в некоторый начальный момент. Фурье-разложение такого возмущения содержит компоненты с вещественными значениями волновых векторов $\mathbf{k}$, а их временная зависимость определяется частотами $\omega(\mathbf{k})$—комплексными корнями дисперсионного уравнения.

Возможна, однако, и другая постановка задачи об устойчивости: задача, в которой речь идет о возмущении, создаваемом в некотором участке пространства по заданному временному закону. Фурье-разложение такого возмущения содержит компоненты с вещественными частотами ω, а их распространение в пространстве определяется волновыми векторами $k(\omega)$, получающимися решением дисперсионного уравнения — на этот раз относительно k; соответственно комплексными оказываются не частоты, а волновые векторы (как и в предыдущем параграфе, мы имеем в виду одномерную задачу и потому пишем $k \equiv k_x$ вместо вектора $\mathbf{k}$).

Комплексность волновых векторов может иметь различный смысл. В одних случаях она может означать просто, что соответствующие волны не могут распространяться в среде (*непропускание*). В других случаях комплексность k может означать *усиление* волн средой при их распространении от источника. Сразу же подчеркнем, что критерием различения этих двух возможностей заведомо не может являться знак $\operatorname{Im} k$: волны могут распространяться в обоих направлениях оси x, а изменение направления распространения эквивалентно изменению знака k.

Физически очевидно, что усиливающими свойствами может обладать лишь неустойчивая среда. Поэтому, например, заранее ясно, что для поперечных электромагнитных волн в плазме с за-