уравнения:

$$\frac{d\omega''}{dk}=0, \tag{62,13}$$

$$V=\frac{d\omega'}{dk}. \tag{62,14}$$

Таким образом, наибольший инкремент неустойчивости дается максимальным значением $\omega''(k)$ как функции вещественного k. Скорость же системы отсчета, в которой такая неустойчивость имеет место, определяется соответствующим значением производной $d\omega'/dk$. Это значение V естественно принять в качестве определения групповой скорости волнового пакета в конвективно-неустойчивой среде.

§ 63. Усиление и непропускание

До сих пор мы рассматривали задачи об устойчивости, в которых речь шла о развитии во времени возмущения, заданного в пространстве в некоторый начальный момент. Фурье-разложение такого возмущения содержит компоненты с вещественными значениями волновых векторов $\mathbf{k}$, а их временная зависимость определяется частотами $\omega(\mathbf{k})$—комплексными корнями дисперсионного уравнения.

Возможна, однако, и другая постановка задачи об устойчивости: задача, в которой речь идет о возмущении, создаваемом в некотором участке пространства по заданному временному закону. Фурье-разложение такого возмущения содержит компоненты с вещественными частотами ω, а их распространение в пространстве определяется волновыми векторами $k(\omega)$, получающимися решением дисперсионного уравнения — на этот раз относительно k; соответственно комплексными оказываются не частоты, а волновые векторы (как и в предыдущем параграфе, мы имеем в виду одномерную задачу и потому пишем $k\equiv k_x$ вместо вектора $\mathbf{k}$).

Комплексность волновых векторов может иметь различный смысл. В одних случаях она может означать просто, что соответствующие волны не могут распространяться в среде (*непропускание*). В других случаях комплексность k может означать *усиление* волн средой при их распространении от источника. Сразу же подчеркнем, что критерием различения этих двух возможностей заведомо не может являться знак $\operatorname{Im} k$: волны могут распространяться в обоих направлениях оси x, а изменение направления распространения эквивалентно изменению знака k.

Физически очевидно, что усиливающими свойствами может обладать лишь неустойчивая среда. Поэтому, например, заранее ясно, что для поперечных электромагнитных волн в плазме с законом дисперсии $\omega^2 = \Omega_e^2 + c^2k^2$ (см. задачу 1 § 32) при частотах $\omega < \Omega_e$ (когда $k(\omega)$ мнимо) имеет место непропускание; действительно, определяемая этим уравнением функция $\omega(k)$ вещественна при всех вещественных значениях k, так что система заведомо устойчива.

Для точной постановки вопроса рассмотрим точечный по координате x источник (или, как говорят, *сигнал*), включаемый в момент $t=0$ и создающий затем монохроматическое (с некоторой частотой ω_0) возмущение ψ (*отклик* системы на сигнал). Интенсивность источника есть, таким образом,

$$\begin{aligned} &g(t, x) = 0 && \text{при} \quad t < 0, \\ &g(t, x) = \mathrm{const} \cdot \delta(x)\, e^{-i\omega_0 t} && \text{при} \quad t > 0. \end{aligned} \tag{63,1}$$

Не конкретизируя физической природы возмущения ψ, мы не делаем того же и в отношении физической природы интенсивности источника g. Существенно лишь, что ωk-компоненты возмущения определяются по его источнику выражением вида

$$\psi_{\omega k} = g_{\omega k}/\Delta(\omega, k). \tag{63,2}$$

Такое выражение получается из неоднородного линеаризованного «уравнения движения» системы, в котором $g(t, x)$ играет роль «правой части» (аналогично тому, как (62,4) было решением однородного уравнения с начальным условием, задаваемым функцией $g(0, x)$). Для источника (63,1) имеем[1])

$$g_{\omega k} = \frac{\mathrm{const}}{i(\omega - \omega_0)}. \tag{63,3}$$

Функция $\psi(t, x)$ находится затем по формуле обращения

$$\psi(t, x) = \mathrm{const} \int\limits_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \Phi(\omega, x) \frac{e^{-i\omega t}}{i(\omega - \omega_0)} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{63,4}$$

$$\Phi(\omega, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\Delta(\omega, k)}\, dk. \tag{63,5}$$

Это выражение автоматически обеспечивает равенство $\psi(t, x) = 0$ при $t < 0$ в соответствии с условиями задачи: возмущение возникает только от включаемого в момент $t = 0$ источника.

Задача состоит теперь в том, чтобы найти асимптотическое выражение $\psi(t, x)$ вдали от источника ($|x| \to \infty$) в установившемся режиме, т. е. по истечении большого времени после вклю-

---

[1]) При вычислении $g_{\omega k}$ надо помнить, что в формуле обратного преобразования интегрирование происходит по контуру, на котором $\mathrm{Im}\,\omega > 0$; поэтому $e^{i\omega t} \to 0$ при $t \to \infty$.

чения источника ($t \to \infty$). Если в таком режиме возмущение стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, то мы имеем дело с непропусканием. Если же возмущение оказывается возрастающим хотя бы по одну сторону от источника — имеет место усиление. Очевидно, что в обоих этих случаях может идти речь лишь о конвективно-неустойчивой (или об устойчивой) системе. При абсолютной неустойчивости возмущение неограниченно растет со временем во всех точках пространства, так что выход на установившийся режим вообще невозможен.

Переходя к отысканию требуемой асимптотики, прежде всего отметим, что асимптотический переход $t \to \infty$ надо произвести до перехода $|x| \to \infty$: поскольку за конечное время возмущение не может распространиться до бесконечности, то переход $|x| \to \infty$ при конечном t обратит ψ в нуль.

Как и в § 62, для получения асимптотического выражения при $t \to \infty$ смещаем путь интегрирования по ω в (63,4) вниз. Аналитические свойства функции $\Phi(\omega, x)$ такие же, как и у функции $\varphi(\omega, x)$ в § 62. Поскольку система предполагается лишь конвективно-неустойчивой, то $\Phi(\omega, x)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости ω и наиболее высокой особой точкой подынтегрального выражения в (63,4) является полюс $\omega = \omega_0$ на вещественной оси. Поэтому асимптотика при $t \to \infty$

$$\psi(t, x) \sim e^{-i\omega_0 t}\Phi(\omega_0, x). \tag{63,6}$$

Для нахождения асимптотики функции $\Phi(\omega_0, x)$ при $|x| \to \infty$ надо теперь смещать путь интегрирования по k вверх (при $x > 0$) или вниз (при $x < 0$) до тех пор, пока он не зацепится за полюс подынтегрального выражения в (63,5) (корень уравнения $\Delta(\omega_0, k) = 0$).

Обозначим посредством $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$ те полюсы, которые при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ находятся соответственно в верхней и нижней полуплоскостях k. По мере уменьшения $\operatorname{Im}\omega$ полюсы перемещаются и при вещественном $\omega = \omega_0$ могут остаться в «своей» полуплоскости или же попасть в другую полуплоскость. В первом случае путь интегрирования в $\Phi(\omega_0, x)$ остается на вещественной оси (как на рис. 22, *а*), а во втором — деформируется, как показано на рис. 22, *б*, огибая «убежавшие» в чужую полуплоскость полюсы $k_+(\omega_0)$ и $k_-(\omega_0)$ (точки A и C). В обоих случаях при смещении контура вверх или вниз он зацепляется соответственно за полюсы k_+ или k_-. Асимптотическое выражение функции $\psi(t, x)$ при $x \to +\infty$ определяется вкладом от наиболее низкого из полюсов $k_+(\omega_0)$, а при $x \to -\infty$ — от наиболее высокого из полюсов $k_-(\omega_0)$; другими словами, это — наиболее близкий к вещественной оси полюс (если все полюсы данной категории остались в «своей» полуплоскости) или же наиболее далекий от вещественной оси полюс из числа тех, которые перешли в «чужую» полуплоскость. С этими значениями k_+ и k_- будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &\sim \exp\{ik_+(\omega_0)x - i\omega_0 t\} \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \psi(t, x) &\sim \exp\{ik_-(\omega_0)x - i\omega_0 t\} \quad \text{при} \quad x < 0. \end{aligned} \tag{63,7}$$

В случае устойчивой системы все полюсы остаются при $\omega = \omega_0$ в «своих» полуплоскостях; действительно, ввиду отсутствия ветвей колебаний с $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$ (при вещественных k) пересечение полюсом $k(\omega)$ вещественной оси могло бы иметь место лишь при $\operatorname{Im}\omega < 0$. Поэтому в (63,7) будет

$$\operatorname{Im} k_+(\omega_0) > 0, \quad \operatorname{Im} k_-(\omega_0) < 0,$$

так что волны затухают в обе стороны от источника.

В случае же конвективной неустойчивости полюсы $k(\omega)$ выходят на вещественную ось уже при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Поэтому заведомо существуют полюсы k_+ или k_-, попавшие при $\omega = \omega_0$ в «чужую» полуплоскость, т. е. для которых $\operatorname{Im} k_+(\omega_0) < 0$ или $\operatorname{Im} k_-(\omega_0) > 0$. Наличие такого полюса $k_+(\omega_0)$ приводит к усилению волны справа от источника, а наличие такого полюса $k_-(\omega_0)$ — к усилению слева от источника.

Резюмируя изложенные рассуждения, приходим к следующему критерию различения случаев непропускания и усиления волн, испускаемых источником с частотой ω_0 в конвективно-неустойчивой системе.

Волна с комплексным значением $k(\omega_0)$ при вещественном ω_0 усиливается, если функция $\operatorname{Im} k(\omega)$ меняет знак при изменении $\operatorname{Im}\omega$ от $+\infty$ до 0 (при заданном $\operatorname{Re}\omega = \omega_0$); если же $\operatorname{Im} k(\omega)$ не меняет знака, то имеет место непропускание.

Отметим, что происхождение этого критерия связано с требованиями причинности. Действительно, при сколь угодно быстром включении источника возмущение во всяком случае должно убывать при $x \to \pm\infty$ просто потому, что за конечное время оно не может распространиться на бесконечное расстояние. С другой стороны, «сколь угодно быстрое» включение можно осуществить по закону $e^{-i\omega t}$ с $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$. Поэтому ясно, что волны, усиливаемые (при вещественном ω) в ту или иную сторону от источника, должны затухать в эту же сторону при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$, откуда и возникает сформулированный выше критерий.

Полученные результаты имеют еще и другой аспект, позволяя определить направление распространения волны в среде с поглощением или усилением. В прозрачной среде (т. е. когда ω и k вещественны) вопрос о физическом направлении распространения решается направлением вектора групповой скорости. В частности, в одномерном случае волна с положительным значением производной $d\omega/dk$ движется в положительном направлении оси x, а с отрицательным — в обратном направлении. В среде же с поглощением или усилением можно утверждать, что в положительном направлении распространяются волны группы k_+, а в отрицательном — группы k_-. В случае вещественных ω и k эта общая формулировка совпадает с прежней. Действительно, малые изменения ω и k связаны друг с другом соотношением

$$\delta k = \frac{\delta\omega}{d\omega/dk}.$$

Отсюда видно, что если у ω появляется мнимая часть $\operatorname{Im}\omega > 0$, то k смещается в верхнюю полуплоскость при $d\omega/dk > 0$ и в нижнюю в обратном случае.

В качестве простого примера применения критериев, полученных в этом и предыдущем параграфах, рассмотрим неустойчивость холодного пучка электронов в холодной плазме, о которой шла речь в § 61. Дисперсионное уравнение этой системы:

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - kV)^2} = 1 \qquad (63,8)$$

(см. (61,6); для волн, распространяющихся в направлении пучка, $\mathbf{kV} = kV$). Корни $k(\omega)$ этого уравнения при $|\omega| \to \infty$ имеют вид[1])

$$k = (\omega \pm \Omega_e')/V. \qquad (63,9)$$

При $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ оба корня лежат в одной и той же (верхней) полуплоскости, т. е. оба корня относятся к категории $k_+(\omega)$. Они не могут, следовательно, при своем перемещении (при уменьшении $\operatorname{Im}\omega$) зажать k-контур, так что неустойчивость — конвективная. Асимптотическое поведение созданного в начальный момент возмущения определяется частотой $\omega = \Omega_e$, вблизи которой корни уравнения (63,8) стремятся к ∞ по закону

$$k^2 = \frac{\Omega_e \Omega_e'^2}{2V^2(\omega - \Omega_e)}. \qquad (63,10)$$

Таким образом, при $t \to \infty$ от возмущения остаются лишь незатухающие плазменные волны.

При вещественных значениях $\omega < \Omega_e$ уравнение (63,8) имеет два комплексно-сопряженных корня $k(\omega)$. Тот из них, у которого $\operatorname{Im} k(\omega) < 0$, попал в нижнюю полуплоскость из верхней. Таким образом, при распространении волн от источника с частотой $\omega_0 < \Omega_e$ происходит их усиление в направлении $x > 0$, т. е. «вниз по течению» пучка.

---

[1]) Отметим, что (63,9) совпадает с дисперсионным уравнением пучка самого по себе, как если бы неподвижной плазмы вообще не было.