§ 64. Неустойчивость при слабой связи двух ветвей спектра колебаний

Применим развитый в §§ 62, 63 общий метод к исследованию неустойчивости, возникающей благодаря «взаимодействию» колебаний с близкими значениями ω и k, относящихся к двум ветвям колебательного спектра бездиссипативной системы; под бездиссипативностью подразумевается здесь отсутствие как истинной диссипации, так и затухания Ландау.

Если бы две ветви $\omega=\omega_1(k)$ и $\omega=\omega_2(k)$ были полностью независимы, то это значило бы, что дисперсионное уравнение распадается на два множителя:

$$[\omega-\omega_1(k)][\omega-\omega_2(k)]=0. \tag{64,1}$$

Вблизи точки пересечения таких ветвей функции $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ имели бы в общем случае вид

$$\begin{aligned}\omega_1(k)&=\omega_0+v_1(k-k_0),\\ \omega_2(k)&=\omega_0+v_2(k-k_0),\end{aligned} \tag{64,2}$$

где v_1, v_2 — некоторые постоянные, а ω_0 и k_0 — значения (вещественные!) ω и k в точке пересечения.

Такой случай, однако, вообще говоря, нереален. Связь между двумя ветвями могла бы строго отсутствовать, в лучшем случае, при каких-то специфических значениях параметров системы, но появилась бы уже при малейшем их изменении[1]). Для отражения реальной ситуации надо поэтому учесть наличие слабой связи между ветвями. Она проявляется в замене нуля в правой стороне уравнения (64,1) на некоторую малую величину ε. Тогда дисперсионное уравнение вблизи этой точки примет вид

$$[\omega-\omega_0-v_1(k-k_0)][\omega-\omega_0-v_2(k-k_0)]=\varepsilon. \tag{64,3}$$

Его решение относительно ω:

$$\omega(k)-\omega_0=\frac{1}{2}\left\{(v_1+v_2)(k-k_0)\pm\left[(k-k_0)^2(v_1-v_2)^2+4\varepsilon\right]^{1/2}\right\}, \tag{64,4}$$

а относительно k:

$$k(\omega)-k_0=$$
$$=\frac{1}{2v_1v_2}\left\{(v_1+v_2)(\omega-\omega_0)\pm\left[(\omega-\omega_0)^2(v_1-v_2)^2+4\varepsilon v_1v_2\right]^{1/2}\right\}. \tag{64,5}$$

---

[1]) Исключение составляют случаи, когда взаимодействие отсутствует в силу требований симметрии, например, если одна ветвь относится к продольным, а другая — к поперечным волнам в изотропной среде. Поскольку в изотропной среде продольный ток не может индуцировать поперечное поле и наоборот, то такие волны не взаимодействуют друг с другом. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в квантовой механике для пересечения термов различной симметрии (см. III, § 79).

Наличие связи между ветвями сдвигает точку их пересечения в комплексную область. Зависимости же $\omega(k)$ для вещественных ω и k имеют различный характер в зависимости от знака постоянной ε и относительного знака постоянных v_1 и v_2. Эти зависимости изображены на рис. 23 для следующих случаев:

$$\begin{array}{llll} \text{А)}\ \varepsilon > 0, & v_1 v_2 > 0, & \text{Б)}\ \varepsilon > 0, & v_1 v_2 < 0, \\ \text{В)}\ \varepsilon < 0, & v_1 v_2 > 0, & \text{Г)}\ \varepsilon < 0, & v_1 v_2 < 0. \end{array} \tag{64,6}$$

Рассмотрим эти случаи поочередно.

А) Здесь функции $\omega(k)$ вещественны при всех (вещественных) k, так что система устойчива. Вещественны также функции $k(\omega)$

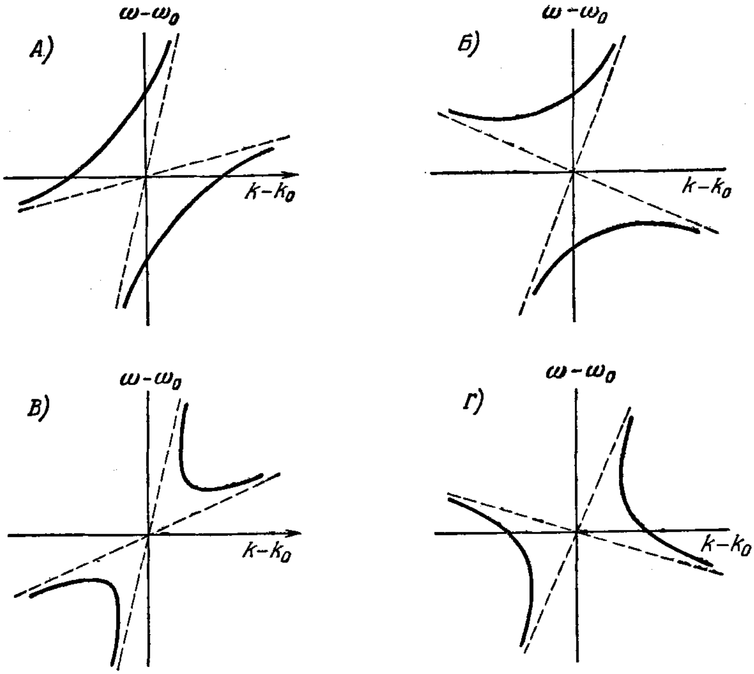

Рис. 23.

при всех ω, так что при всех ω волны распространяются не усиливаясь.

Б) Функции $\omega(k)$ вещественны при всех k, так что система устойчива. Функции же $k(\omega)$ комплексны в области частот

$$(\omega-\omega_0)^2 < \frac{4\,|\varepsilon v_1 v_2|}{(v_1-v_2)^2}. \tag{64,7}$$

Ввиду устойчивости системы, в этой области имеет место непропускание.

В) При

$$(k-k_0)^2 < \frac{4|\varepsilon|}{(v_1-v_2)^2} \tag{64,8}$$

функции $\omega(k)$ комплексны, причем для одной из них $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$, т. е. имеет место неустойчивость. Эта неустойчивость — **конвективная**; действительно, при $|\omega| \to \infty$ корни $k(\omega)$ имеют вид

$$k \approx \omega/v_1, \quad k \approx \omega/v_2 \tag{64,9}$$

и при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ оба лежат в одной и той же полуплоскости k. Пусть $v_1, v_2 > 0$; тогда эта полуплоскость — верхняя и корни относятся к категории $k_+(\omega)$. При вещественных же ω в области (64,7) корни $k(\omega)$ составляют пару комплексно-сопряженных величин. Тот из них, для которого $\operatorname{Im} k(\omega) < 0$, перешел из верхней полуплоскости в нижнюю. Следовательно, в полосе частот (64,7) имеет место усиление волн, распространяющихся в направлении $x > 0$.

Легко также найти для этого случая определенную согласно (62,14) «групповую скорость» волн — скорость системы отсчета, в которой имеет место абсолютная неустойчивость с максимальным инкрементом. Продифференцировав уравнение (64,3) по k и подставив согласно (62,13—14) $d\omega/dk = V$, получим

$$\frac{V-v_1}{V-v_2} = -\frac{\omega-\omega_0-v_1(k-k_0)}{\omega-\omega_0-v_2(k-k_0)}. \tag{64,10}$$

Поскольку левая сторона этого равенства вещественна, то должна быть вещественной (при комплексном ω) также и правая сторона. Из этого условия находим, что $k = k_0$, после чего из (64,10) находим скорость

$$V = \frac{v_1+v_2}{2}, \tag{64,11}$$

а из (64,3) — соответствующий максимальный инкремент

$$(\operatorname{Im}\omega)_{\max} = |\varepsilon|^{1/2}. \tag{64,12}$$

Г) Функции $k(\omega)$ вещественны при всех (вещественных) ω, но функции $\omega(k)$ комплексны в области (64,8), так что система неустойчива. Для выяснения характера этой неустойчивости замечаем, что согласно (64,9) (при различных знаках v_1 и v_2) при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ корни $k(\omega)$ лежат в различных полуплоскостях. Эти два корня имеют точку слияния в верхней полуплоскости ω при

$$\omega = \omega_c = \omega_0 + 2i\frac{\sqrt{v_1 v_2 \varepsilon}}{|v_1-v_2|}. \tag{64,13}$$

Это значит, что неустойчивость — абсолютная, с инкрементом $\operatorname{Im}\omega_c$. При $v_1 = -v_2$, что соответствует картине возмущения в системе отсчета, движущейся со скоростью (64,11), инкремент достигает максимального значения (64,12).

Задача

Выяснить характер неустойчивости низкочастотных ($\omega \sim \omega_{Bi}$) «медленных» ($\omega/k \ll c$) поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в направлении постоянного магнитного поля в холодной магнитоактивной плазме; вдоль того же направления через плазму движется холодный пучок электронов малой плотности.

Решение. Для составления дисперсионного уравнения пишем его сначала с учетом лишь электронов пучка в системе отсчета, где пучок покоится. Согласно (56,9) имеем в этой системе:

$$k^2c^2 - \omega^2 = -\frac{\Omega_e'^2 \omega}{\omega \pm \omega_{Be}},$$

где Ω_e' — плазменная частота, отвечающая плотности пучка. При возвращении к лабораторной системе отсчета, в которой пучок движется со скоростью $\mathbf{V}$ (вдоль которой направляем ось x), в правой стороне равенства надо заменить

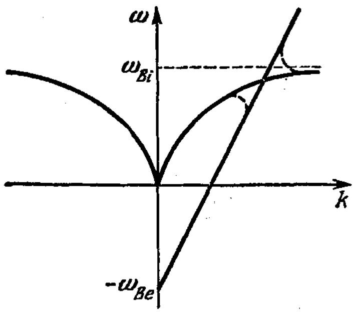

Рис. 24.

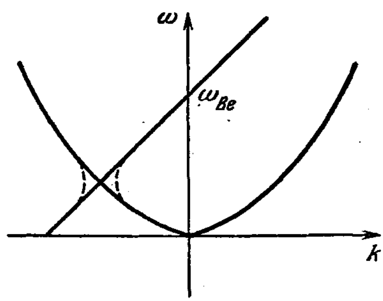

Рис. 25.

$\omega \to \omega - kV$; разность же $k^2c^2 - \omega^2$ инвариантна по отношению к изменению системы отсчета. Добавив теперь в лабораторной системе члены, связанные с электронами и ионами плазмы, получим

$$k^2c^2 - \omega^2 = -\frac{\Omega_e'^2 (\omega - kV)}{\omega - kV \pm \omega_{Be}} - \frac{\omega\Omega_e^2}{\omega \pm \omega_{Be}} - \frac{\omega\Omega_i^2}{\omega \mp \omega_{Bi}}.$$

Пренебрегая здесь (в соответствии с условиями задачи) ω по сравнению с ck и с ω_{Be} и заметив также, что $\Omega_e^2/\omega_{Be} = \Omega_i^2/\omega_{Bi}$, приведем дисперсионное уравнение к виду

$$\left[k^2c^2 - \frac{\Omega_i^2\omega^2}{\omega_{Bi}(\omega_{Bi} \mp \omega)}\right](\omega - kV \pm \omega_{Be}) = -\Omega_e'^2 (\omega - kV). \qquad (1)$$

Первый множитель в левой стороне отвечает «основной», а второй — пучковой ветви спектра колебаний; правая сторона описывает «взаимодействие» этих ветвей.

При верхних знаках в (1) законы дисперсии двух независимых ветвей показаны на рис. 24 сплошными линиями (как всегда, достаточно рассматривать лишь ветви с $\omega > 0$). Вблизи точки ω_0, k_0 их пересечения разложение уравнения (1) имеет вид

$$2k_0c^2\left[k-k_0-\frac{\omega-\omega_0}{v_1}\right][\omega-\omega_0-V(k-k_0)]=\Omega_e'^2\omega_{Be}$$

с положительным (как это ясно из наклона кривых на рис. 24) коэффициентом v_1. Сравнение с (64,3) показывает, что имеет место случай В — конвективная неустойчивость (на рис. 24 пунктиром показан ход ветвей спектра с учетом их взаимодействия).

Аналогичные графики при нижних знаках в (1) показаны на рис. 25. Вблизи точки пересечения дисперсионное уравнение имеет вид

$$2k_0c^2\left[k-k_0+\frac{\omega-\omega_0}{v_1}\right][\omega-\omega_0-V(k-k_0)]=-\Omega_e'^2\omega_{Be},$$

где снова $v_1 > 0$. Теперь имеет место случай Г — абсолютная неустойчивость (имеющееся в этом случае второе пересечение происходит, как видно из рисунка, при $\omega \gtrsim \omega_{Be}$, что противоречит условиям задачи).

§ 65. Неустойчивость конечных систем

Вся изложенная в §§ 61—63 теория относилась к однородным средам, бесконечно протяженным по крайней мере в одном направлении (ось x). При применении к реальным ограниченным системам это значит, что пренебрегается эффектами, связанными с отражением волн от границ; другими словами, такая теория ограничена временами порядка величины времени распространения возмущения по длине системы.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости в обратной ситуации, когда конечность системы существенна и спектр ее собственных колебаний определяется граничными условиями на концах (при этом мы по-прежнему ограничиваемся одномерным случаем; длину системы вдоль оси x обозначим через L). Спектр частот конечной системы дискретен, и, если хотя бы одна из собственных частот имеет положительную мнимую часть, система неустойчива. Различие между случаями абсолютной и конвективной неустойчивости теряет здесь смысл.

Таким образом, вопрос о выяснении устойчивости или неустойчивости конечной системы эквивалентен вопросу о нахождении спектра ее (комплексных) собственных частот. Дисперсионное уравнение, определяющее эти частоты, может быть установлено в общем виде для системы хотя и конечных, но достаточно больших размеров L: $\operatorname{Im}|k|\cdot L \gg 1$ (*А. Г. Куликовский*, 1966).

Пусть $k(\omega)$ — решения дисперсионного уравнения неограниченной среды; ветви этой многозначной функции снова разобьем на две категории, $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$, определенные в § 63. Собственные колебания конечной системы можно рассматривать как результат наложения бегущих волн, отраженных от двух ее