При верхних знаках в (1) законы дисперсии двух независимых ветвей показаны на рис. 24 сплошными линиями (как всегда, достаточно рассматривать лишь ветви с $\omega > 0$). Вблизи точки ω_0, k_0 их пересечения разложение уравнения (1) имеет вид

$$2k_0c^2\left[k-k_0-\frac{\omega-\omega_0}{v_1}\right][\omega-\omega_0-V(k-k_0)]=\Omega_e'^2\omega_{Be}$$

с положительным (как это ясно из наклона кривых на рис. 24) коэффициентом v_1. Сравнение с (64,3) показывает, что имеет место случай В — конвективная неустойчивость (на рис. 24 пунктиром показан ход ветвей спектра с учетом их взаимодействия).

Аналогичные графики при нижних знаках в (1) показаны на рис. 25. Вблизи точки пересечения дисперсионное уравнение имеет вид

$$2k_0c^2\left[k-k_0+\frac{\omega-\omega_0}{v_1}\right][\omega-\omega_0-V(k-k_0)]=-\Omega_e'^2\omega_{Be},$$

где снова $v_1 > 0$. Теперь имеет место случай Г — абсолютная неустойчивость (имеющееся в этом случае второе пересечение происходит, как видно из рисунка, при $\omega \gtrsim \omega_{Be}$, что противоречит условиям задачи).

§ 65. Неустойчивость конечных систем

Вся изложенная в §§ 61—63 теория относилась к однородным средам, бесконечно протяженным по крайней мере в одном направлении (ось x). При применении к реальным ограниченным системам это значит, что пренебрегается эффектами, связанными с отражением волн от границ; другими словами, такая теория ограничена временами порядка величины времени распространения возмущения по длине системы.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости в обратной ситуации, когда конечность системы существенна и спектр ее собственных колебаний определяется граничными условиями на концах (при этом мы по-прежнему ограничиваемся одномерным случаем; длину системы вдоль оси x обозначим через L). Спектр частот конечной системы дискретен, и, если хотя бы одна из собственных частот имеет положительную мнимую часть, система неустойчива. Различие между случаями абсолютной и конвективной неустойчивости теряет здесь смысл.

Таким образом, вопрос о выяснении устойчивости или неустойчивости конечной системы эквивалентен вопросу о нахождении спектра ее (комплексных) собственных частот. Дисперсионное уравнение, определяющее эти частоты, может быть установлено в общем виде для системы хотя и конечных, но достаточно больших размеров L: $\mathrm{Im}\,|k|\cdot L \gg 1$ (*А. Г. Куликовский*, 1966).

Пусть $k(\omega)$ — решения дисперсионного уравнения неограниченной среды; ветви этой многозначной функции снова разобьем на две категории, $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$, определенные в § 63. Собственные колебания конечной системы можно рассматривать как результат наложения бегущих волн, отраженных от двух ее границ (в среде без поглощения и усиления это были бы обычные стоячие волны). Отражение сопровождается, вообще говоря, взаимным превращением волн, относящихся к различным ветвям спектра. Поэтому бегущая волна заданной частоты представляет собой суперпозицию всех ветвей. Но вдали от границ основной вклад в каждую волну дает лишь один из членов суперпозиции.

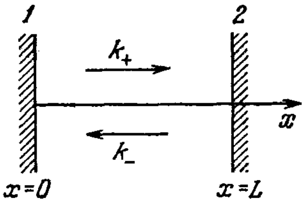

Рис. 26.

Так, для волны, распространяющейся от левой границы, $x=0$ (рис. 26), в положительном направлении оси x асимптотическое выражение вдали от этой границы имеет вид

$$\psi = a \exp\{i[k_+(\omega)x - \omega t]\}, \qquad (65,1)$$

причем в качестве $k_+(\omega)$ должна быть выбрана та из ветвей этой категории, для которой $\operatorname{Im} k_+(\omega)$ имеет (при заданном вещественном ω) алгебраически наименьшее значение[1]).

После отражения от правой границы ($x=L$) волна распространяется влево и на достаточно больших расстояниях от этой границы имеет асимптотический вид

$$\psi = R_2 a \exp\{ik_+(\omega)L\} \exp\{i[k_-(\omega)(x-L) - \omega t]\}, \qquad (65,2)$$

где $k_-(\omega)$ — та из ветвей этой категории, для которой $\operatorname{Im} k_-(\omega)$ имеет алгебраически наибольшее значение. Коэффициент же R_2 зависит от закона трансформации волн на данной конкретной границе.

Наконец, после второго отражения — на этот раз от левой границы — снова получим волну, распространяющуюся вправо:

$$\psi = R_1 R_2 a e^{i(k_+ - k_-)L} e^{i(k_+ x - \omega t)}. \qquad (65,3)$$

Ввиду однозначности $\psi(t, x)$ выражение (65,3) должно совпадать с (65,1). Отсюда находим равенство

$$R_1 R_2 \exp\{i[k_+(\omega) - k_-(\omega)]L\} = 1. \qquad (65,4)$$

Оно определяет спектр частот ω конечной системы, т. е. является ее дисперсионным уравнением.

Взяв модуль от обеих частей этого уравнения, имеем

$$|R_1 R_2| \exp\{-\operatorname{Im}(k_+ - k_-)L\} = 1. \qquad (65,5)$$

[1]) То есть это — наименьшее положительное значение, если все $\operatorname{Im} k_+(\omega) > 0$, или же наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение, если существуют ветви, для которых $\operatorname{Im} k_+(\omega) < 0$. В первом случае (65,1) — наименее быстро затухающая (с расстоянием x) волна, а во втором — наиболее быстро усиливающаяся.

При $L \to \infty$ экспоненциальный множитель стремится к 0 или к ∞ (в зависимости от знака разности $\operatorname{Im}(k_+ - k_-)$). Поэтому для достаточно длинных систем равенство (65,5) возможно только, если

$$\operatorname{Im}[k_+(\omega) - k_-(\omega)] = 0. \qquad (65,6)$$

Таким образом, в этом случае дисперсионное уравнение сводится к виду, зависящему только от свойств среды самой по себе и не зависящему от конкретного характера условий на ее границах. Уравнение (65,6) определяет некоторую кривую на плоскости ω; на этой кривой лежат очень близкие друг к другу (при больших L) дискретные собственные частоты. Если эта кривая хотя бы частично лежит в верхней полуплоскости — система неустойчива. В связи с тем, что эта неустойчивость обуславливается свойствами системы в целом, ее называют *глобальной*.

Сделаем еще несколько замечаний о связи глобальной неустойчивости конечной системы с неустойчивостью бесконечной среды. Прежде всего, легко видеть, что при наличии глобальной неустойчивости бесконечная система заведомо неустойчива: существуют такие вещественные значения k, для которых $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$. Действительно, по определению функций $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$ их значения при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ лежат в различных полуплоскостях k. Условие же (65,6) означает, что по мере уменьшения $\operatorname{Im}\omega$ точки $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$ могут попасть в одну и ту же полуплоскость, причем (в случае глобальной неустойчивости) это происходит еще при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Следовательно, еще раньше (т. е. заведомо при $\operatorname{Im}\omega > 0$) по крайней мере одна из этих точек пересечет вещественную ось, что и требовалось.

Обратное утверждение справедливо, однако, лишь для абсолютной (но не конвективной) неустойчивости бесконечной среды: наличие абсолютной неустойчивости достаточно для существования также и глобальной неустойчивости конечной системы. Действительно, условие абсолютной неустойчивости состоит в существовании точки ветвления функции $k(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega > 0$, причем сливающиеся ветви относятся к категориям k_+ и k_-; в такой точке заведомо выполняется также и условие (65,6).

Конвективно же неустойчивая среда при наличии границ может оказаться как неустойчивой, так и устойчивой.