Обратим внимание на то, что функция $\chi(\mathbf{k})$ входит в подынтегральные выражения в виде простых сумм ее значений для различных $\mathbf{k}$ (подобно тому, как это было в классическом интеграле столкновений в газах (6,4—5)).

Уравнение (67,13) имеет очевидное решение

$$\chi = \mathrm{const}\cdot\omega, \tag{67,18}$$

тождественно обращающее в нуль интеграл (67,17) в силу сохранения энергии при столкновениях. Как уже было объяснено в § 6, это «паразитное» решение отвечает просто изменению температуры на малую постоянную величину; оно исключается наложением дополнительного условия (67,14).

Другое же «паразитное» решение

$$\chi = \mathbf{k}\delta\mathbf{V} \tag{67,19}$$

($\delta\mathbf{V}$—константа), отвечающее малому изменению скорости движения фононного газа как целого (ср. (6,6)), исключается уже существованием процессов переброса, нарушающих сохранение суммарного квазиимпульса фонона.

§ 68. Теплопроводность диэлектриков. Высокие температуры

Уравнение (67,13) позволяет сразу же определить температурную зависимость коэффициента теплопроводности диэлектрика при высоких температурах, больших по сравнению с дебаевской температурой $\Theta \sim u/d$ ($\hbar u/d$ в обычных единицах).

Максимальное значение энергии фононов во всех ветвях их спектра порядка величины Θ. Поэтому при $T \gg \Theta$ энергии всех вообще фононов $\omega \ll T$, причем для основной их массы $\omega \sim \Theta$. При этом равновесная функция распределения (67,9) сводится к

$$N_0 \approx T/\omega \gg 1. \tag{68,1}$$

В интеграле столкновений (67,17) температура выносится в виде множителя T^2; функция w, взятая для частот $\omega \sim \Theta$, не влияет на температурную зависимость интеграла. В левой же стороне уравнения (67,13) производная $\partial N_0/\partial T \approx 1/\omega$ не содержит температуры. Отсюда заключаем, что

$$\chi \sim \frac{\nabla T}{T^2}, \quad \delta N = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega}\chi \sim \frac{\nabla T}{T},$$

а потому и тепловой поток[1])

$$\mathbf{q}=\sum_g\int \omega \mathbf{u}\delta N\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\backsim\frac{\nabla T}{T}.$$

Таким образом, коэффициент теплопроводности обратно пропорционален температуре:

$$\varkappa\backsim 1/T,\qquad T\ll\Theta \tag{68,2}$$

(в классической теории этот результат был получен *Дебаем* (*P. Debye*)). В анизотропном кристалле направления $\mathbf{q}$ и ∇T, вообще говоря, не совпадают, так что коэффициент теплопроводности не скаляр, а тензор второго ранга; говоря о его температурной зависимости, мы отвлекаемся от этого обстоятельства.

Оценим длину свободного пробега фононов в рассматриваемой области температур. Согласно элементарному газокинетическому соотношению (7,10), $\varkappa\sim C\bar{v}l$, где C — теплоемкость (отнесенная к единице объема), $\bar{v}$ — средняя скорость носителей энергии, l — длина их пробега. Теплоемкость кристалла при высоких температурах постоянна; постоянна и скорость фононов, которую можно оценить как скорость звука u. Тогда мы видим, что длина пробега $l\backsim 1/T$. Длина l должна была бы стать порядка постоянной решетки d при температурах настолько высоких, что амплитуда колебаний атомов тоже стала бы $\sim d$. Согласно оценке (67,5), такая температура $\sim Mu^2$, и для длины пробега и эффективной частоты столкновений $\nu\sim u/l$ находим оценки

$$l\sim Mu^2d/T,\quad \nu\sim T/Mud. \tag{68,3}$$

Отсюда видно, что $l\gg d$ фактически при всех температурах ниже точки плавления.

В изложенных рассуждениях по существу подразумевалось, что рассмотренный трехфононный механизм теплового сопротивления кристаллической решетки эффективен для всех фононов. Потоки энергии, переносимой различными группами фононов, аддитивны, так что аддитивны и их вклады в коэффициент теплопроводности. Если данный механизм был бы недостаточен хотя бы для какой-нибудь группы фононов, то тем самым он был бы вообще недостаточен для обеспечения конечной теплопроводности. В этом отношении требуют особого рассмотрения длинноволновые акустические фононы.

[1]) Заранее очевидное обращение $\mathbf{q}$ в нуль в равновесии формально следует из обращения в нуль интеграла по d^3k ввиду нечетности подынтегрального выражения как функции $\mathbf{k}$: частота $\omega(\mathbf{k})$, а с нею и $N_0(\omega)$ — четные функции $\mathbf{k}$, а скорость $\mathbf{u}=\partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — нечетная функция. Напомним (см. V, § 69), что четность функции $\omega(\mathbf{k})$ связана с симметрией по отношению к обращению времени и имеет место при любой симметрии кристаллической решетки.

Рассмотрим прежде всего процессы, в которых участвуют только длинноволновые акустические фононы с малыми квазиимпульсами сравнимой величины (будем обозначать эти квазиимпульсы буквами $\mathbf{f}$ с соответствующими индексами). Оценим для таких процессов интеграл столкновений (67,17) в смысле его зависимости от f. Согласно (66,14), в этом случае функция $w \propto ff_1f_2 \sim f^3$. Множители $N_0 \sim T/\omega \propto 1/f$. Интегрирование производится в k-пространстве по объему $\sim f^3$, но δ-функция выделяет внутри этого объема лишь поверхность с площадью $\sim f^2$. Таким образом, найдем, что интеграл столкновений

$$I(\chi) \propto f^2\chi \propto f^4\delta N$$

(в последнем выражении учтено, что согласно определению (67,15) $\delta N \propto \chi/f^2$); этот результат можно сформулировать в терминах эффективной частоты столкновений:

$$\nu(f) \propto f^4. \tag{68,4}$$

В левой же стороне кинетического уравнения (67,13) множитель $\mathbf{u}$ не зависит (для акустических фононов) от f, а $\partial N_0/\partial T \propto$ $\propto 1/f$. Поэтому

$$\delta N \propto 1/f\nu.$$

Вклад длинноволновых фононов в поток энергии $\mathbf{q}$ дается интегралом (67,4), взятым по объему $\sim f^3$. Но этот интеграл

$$\int \omega u \delta N \frac{d^3f}{(2\pi)^3} \propto \int \frac{d^3f}{\nu(f)} \tag{68,5}$$

расходится при малых f как $1/f$. Таким образом, трехфононные процессы между одними только длинноволновыми акустическими фононами привели бы к бесконечной теплопроводности; для обеспечения конечного теплового сопротивления необходимы столкновения этих фононов с коротковолновыми (*И. Я. Померанчук*, 1941).

Пусть коротковолновый фонон с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ распадается на длинноволновый акустический фонон $\mathbf{f}$ и коротковолновый фонон $\mathbf{k}-\mathbf{f}-\mathbf{b}$, относящийся к той же ветви спектра $\omega(\mathbf{k})$, что и фонон $\mathbf{k}$ (для дальнейших рассуждений существенна не столько абсолютная величина k, сколько тот факт, что $k \gg f$). Поскольку функция $\omega(\mathbf{k})$ периодична в обратной решетке, то $\omega(\mathbf{k}-\mathbf{f}-\mathbf{b}) = \omega(\mathbf{k}-\mathbf{f})$ и закон сохранения энергии дает

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f. \tag{68,6}$$

Второй член справа — частота акустического фонона — линейная функция f ($u(\mathbf{n}) = \omega(\mathbf{f})/f$) — фазовая скорость звука, зависящая от направления $\mathbf{n} = \mathbf{f}/f$). Разложив $\omega(\mathbf{k}-\mathbf{f})$ по степеням малого $\mathbf{f}$, переписываем это равенство в виде

$$\mathbf{f}\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = fu(\mathbf{n}). \qquad (68,7)$$

Оно может быть выполнено, лишь если скорость коротковолнового фонона превышает скорость звука:

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\right| > u(\mathbf{n}). \qquad (68,8)$$

В этом смысле наиболее «опасна» акустическая ветвь с наибольшей скоростью звука; эту ветвь мы и будем иметь в виду, говоря об акустических фононах[1]).

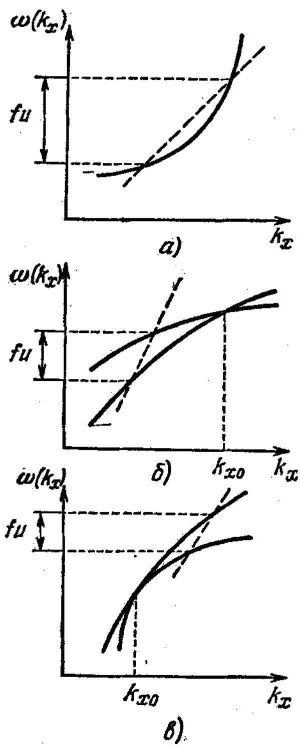

Рис. 27.

Другие возможности для трехфононных процессов появляются при наличии точек вырождения в $\boldsymbol{k}$-пространстве, в которых энергии двух или более ветвей фононного спектра совпадают (*C. Herring*, 1954); наличие таких точек (изолированных или заполняющих линию или плоскость) во многих случаях является обязательным следствием симметрии кристаллической решетки. Возникающие в результате возможности иллюстрируются графическим построением, которое мы сначала проведем для уже рассмотренного случая испускания «сверхзвуковым» коротковолновым фононом.

При заданном направлении $\mathbf{f}$ выберем это направление в качестве оси x; на рис. 27, *а* сплошная кривая изображает зависимость $\omega(k_x)$ (при заданных k_y, k_z) для коротковолновых фононов. Написав условие (68,7) в виде

$$v_x \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_x} = u(\mathbf{n}_x),$$

мы видим, что испускание акустического фонона возможно, если в некоторой точке кривой ее наклон совпадает со скоростью звука. Тогда вблизи этой точки частоты $\omega(\mathbf{k})$ и $\omega(\mathbf{k}-\mathbf{f})$ коротковолновых фононов даются точками пересечения кривой с пунк-

---

[1]) В изотропном твердом теле одна ветвь акустического спектра отвечает продольным, а две другие — поперечным колебаниям; скорость продольных звуковых волн больше скорости поперечных волн. В анизотропном кристалле разделение волн на продольные и поперечные теряет, вообще говоря, смысл. Но в литературе часто называют условно «продольной» ветвь с наибольшей скоростью звука.

тирной прямой, проведенной с наклоном $u(\mathbf{n}_x)$; разность ординат этих точек дает частоту uf.

Если же в некоторой точке $k_x = k_{x0}$ кривые двух ветвей $\omega(k_x)$ пересекаются, то вблизи такой точки трехфононный процесс возможен всегда, при любых наклонах кривых $\omega(k_x)$, независимо от того, имеет ли место в точке k_{x0} простое пересечение (рис. 27, *б*) или касание (рис. 27, *в*). При этом оба коротковолновых фонона относятся к различным ветвям спектра.

Оценим эффективное число столкновений длинноволнового акустического фонона при наличии точек вырождения. Речь при этом должна идти о процессах поглощения и испускания этого фонона — процессы (67,8) (при распаде такого фонона — процессы (67,7) — два образующихся фонона будут также длинноволновыми и мы возвратились бы к прежней ситуации). Поэтому мы должны оценить второй член в (67,17), считая, что

$$\omega_1,\ \omega_3 \gg \omega \sim f \to 0.$$

При этом учтем, что $w \sim f$, $N_0 \sim 1/f$, а остальные множители под интегралом можно заменить на независящие от f средние значения, поскольку интегрирование производится лишь в окрестности точек вырождения. Снова введя $\delta N \sim \chi/f^2$, получим оценку зависимости интеграла столкновений от f в виде $I(\chi) \sim \sim \nu(f)\,\delta N$, где

$$\nu(f) \sim f^2 \int \delta[\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k})]\, d^3k. \tag{68,9}$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности в $\mathbf{k}$-пространстве, определяемой уравнением

$$\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k}) = 0 \tag{68,10}$$

согласно формуле[1])

$$\int \delta(F)\, d^3k = \oint \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} F|}, \tag{68,11}$$

где интеграл берется по поверхности $F(\mathbf{k}) = 0$. Тогда получим

$$\nu(f) \sim f^2\, \Delta S(f) \left\langle \left| \frac{\partial \omega_3(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial \omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f})}{\partial \mathbf{k}} \right|^{-1} \right\rangle, \tag{68,12}$$

где $\Delta S(f)$ — площадь поверхности (68,10), а угловые скобки означают усреднение по поверхности.

---

[1]) Эту формулу можно сразу получить, если учесть, что

$$d^3k = dS\, dl = dS\, dF / |\nabla_{\mathbf{k}} F|,$$

где l — расстояние по нормали к поверхности.

Рассмотрим типичный случай, когда точки вырождения образуют линию в $\mathbf{k}$-пространстве. Тогда при $f \to 0$ поверхность (68,10) стягивается в линию, на которой лежат точки вырождения, а при малых f она представляет собой тонкую трубку, охватывающую эту линию; зависимость площади ΔS от f совпадает поэтому с зависимостью от f диаметра трубки.

Если изоэнергетические поверхности пересекаются на линии вырождения без касания (см. рис. 27, *б*), то расстояние точки $\mathbf{k}$ от точки вырождения зависит от f линейно, так что и $\Delta S \propto f$. Поскольку разность производных в этом случае конечна в точке пересечения, то

$$\nu(f) \propto f^3. \tag{68,13}$$

Интеграл (68,5) расходится теперь уже лишь логарифмическим образом. Эта расходимость должна устраняться так же, как и в отсутствие вырождения (см. ниже). Ввиду слабости расходимости она обычно не приводит к существенному изменению закона (68,2).

Пусть теперь изоэнергетические поверхности имеют в точке вырождения квадратичное касание. Тогда, как ясно из рис. 27, *в*, f пропорционально квадрату расстояния до точки касания. Площадь же ΔS, будучи пропорциональной этому расстоянию, оказывается $\propto f^{1/2}$. Но такова же в этом случае зависимость от f и разности производных в (68,12), поскольку кривые производных пересекаются уже без касания. Поэтому в этом случае

$$\nu(f) \propto f^2 \tag{68,14}$$

и расходимость в теплопроводности не возникает.

Аналогичным образом можно рассмотреть и другие типы вырождения[1]).

Если точки вырождения в фононном спектре отсутствуют, то для обеспечения конечной теплопроводности за счет трехфононных процессов условие (68,6) должно выполняться (хотя бы для одной ветви спектра $\omega(\mathbf{k})$) при всех направлениях $\mathbf{n}$. В противном случае конечная теплопроводность устанавливается лишь за счет процессов более высокого порядка (четырехфононных) и закон (68,2) не имеет места. Заметим, что при низких температурах, когда длина пробега настолько возрастает, что может сравниться с размерами образца L, расходимость интеграла (68,5) может обрезаться на $f \sim 1/L$, что привело бы к зависимости коэффициента теплопроводности от размеров L.

---

[1]) Их исследование—см. оригинальную статью: *Herring C.*— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 954.