## § 70. Рассеяние фононов на примесях

В двух предыдущих параграфах подразумевалось, что кристаллическая решетка — идеальная, без дефектов. Остановимся теперь на роли, которую может играть в теплопроводности диэлектрика рассеяние фононов на примесных атомах.

По отношению к длинноволновым акустическим фононам примесный атом представляет собой точечный дефект решетки. Характерная особенность рассеяния на таких дефектах состоит в его упругости (частота фонона не меняется), причем сечение рассеяния быстро падает с уменьшением частоты или, что то же, волнового вектора — как $k^4$ [1]).

Интеграл столкновений для рассеяния фононов на примесях имеет вид

$$\mathrm{St}\, N_{\mathbf{k}} = N_{\text{пр}} \int w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \{N_{\mathbf{k}'}(1+N_{\mathbf{k}}) - N_{\mathbf{k}}(1+N_{\mathbf{k}'})\} \delta(\omega'-\omega) \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \tag{70,1}$$

Как обычно, первый член в фигурных скобках дает число актов рассеяния, приводящих (в единицу времени) фонон в состояние с заданным квазиимпульсом $\mathbf{k}$ из состояний с любыми другими значениями $\mathbf{k}'$, отвечающими той же энергии. Аналогичным образом, второй член дает число актов рассеяния, уводящих фононы из заданного состояния во все другие. Если примесные атомы расположены хаотически, а среднее расстояние между ними много больше амплитуды рассеяния, то различные атомы рассеивают независимо и вероятности складываются. В этих условиях (что и предположено в (70,1)) общее число актов рассеяния пропорционально плотности примесных атомов $N_{\text{пр}}$. При рассеянии в анизотропной среде функция $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит от направлений обоих векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$; зависимость же от абсолютной величины $k=k'$ дается законом $w \propto k^4$. В (70,1) положено $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. Напомним, что в борновском приближении это равенство следует из условия унитарности с учетом малости амплитуды рассеяния, при пренебрежении членами второго порядка (см. II, § 126). К рассеянию фонона на примесном атоме борновское приближение, вообще говоря, неприменимо. Но при низких температурах, когда речь идет о фононах с малыми $\mathbf{k}$, есть другой источник малости амплитуды рассеяния — ее пропорциональность $k^2$; пренебрегая членами $\propto k^4$, снова придем к требуемому равенству.

[1]) Это — общее свойство рассеяния звуковых волн на препятствиях с размерами, малыми по сравнению с длиной волны (ср. VI, § 76). Ср. также аналогичную ситуацию для рассеяния длинных электромагнитных волн — II, § 79,

Произведения $N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'}$ в фигурных скобках в (70,1) сокращаются, и после подстановки $N = N + \delta N$ интеграл столкновений сразу принимает линеаризованный вид:

$$\operatorname{St} N \equiv I_{\text{пр}}(\delta N) = N_{\text{пр}} \int w\,(\delta N_{\mathbf{k}'} - \delta N_{\mathbf{k}})\,\delta(\omega' - \omega)\,\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \qquad (70,2)$$

Вместе с функцией $w$ этот интеграл пропорционален $k^4$. Поскольку в то же время производная $\partial N_0/\partial T \propto 1/\omega \propto 1/k$ при $\omega \ll T$, то в этой области частот

$$\delta N \propto k^{-5}. \qquad (70,3)$$

С такой ситуацией мы уже встречались в § 68 (ср. (68,4)): зависимость (70,3) приводит к расходимости интеграла, определяющего тепловой поток. Таким образом, само по себе наличие примесей в кристалле не может обеспечить конечности теплового сопротивления диэлектрика.

Это не означает, однако, что примеси вообще не играют роли в установлении этого сопротивления. Дело в том, что рассеяние на примесных атомах не сохраняет квазиимпульс фононов, и в этом смысле оно может играть роль процессов переброса. В достаточно чистых образцах может существовать область низких температур, в которой эффективная частота $\nu_{\text{пр}}$ рассеяния на примесях (для фононов с $\omega \sim T$) занимает промежуточное положение между частотами нормальных и перебросных фонон-фононных столкновений:

$$\nu_N \gg \nu_{\text{пр}} \gg \nu_U. \qquad (70,4)$$

В таких условиях роль процессов переброса переходит к примесному рассеянию и формулы (69,6—8) остаются в силе, если заменить в них $I_U$ на $I_{\text{пр}}$. В результате коэффициент теплопроводности определяется формулой (69,9) с $\nu_{\text{пр}}$ вместо $\nu_U$:

$$\varkappa = \beta_1^2/\beta_2 \nu_{\text{пр}}.$$

Согласно (70,2), $\nu_{\text{пр}} \propto \omega^4 \sim T^4$. Величины же $\beta_1$ и $\beta_2$ для акустических фононов пропорциональны $T^3$ (см. (69,10)). Поэтому мы приходим в рассматриваемой ситуации к закону $\varkappa \propto 1/T$.

## § 71. Гидродинамика фононного газа в диэлектрике

Приближенное сохранение квазиимпульса при условии малости длины пробега $l_N$ для нормальных столкновений по сравнению с длиной пробега $l_U$ для процессов переброса,

$$l_N/l_U \sim \nu_U/\nu_N \ll 1, \qquad (71,1)$$

делает систему фононов в кристалле при низких температурах во многих отношениях подобной обычному газу. Нормальные