Произведения $N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'}$ в фигурных скобках в (70,1) сокращаются, и после подстановки $N = N + \delta N$ интеграл столкновений сразу принимает линеаризованный вид:

$$\mathrm{St}\, N \equiv I_{\text{пр}}(\delta N) = N_{\text{пр}} \int w\,(\delta N_{\mathbf{k}'} - \delta N_{\mathbf{k}})\,\delta(\omega' - \omega)\,\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \qquad (70,2)$$

Вместе с функцией w этот интеграл пропорционален k^4. Поскольку в то же время производная $\partial N_0/\partial T \propto 1/\omega \propto 1/k$ при $\omega \ll T$, то в этой области частот

$$\delta N \propto k^{-5}. \qquad (70,3)$$

С такой ситуацией мы уже встречались в § 68 (ср. (68,4)): зависимость (70,3) приводит к расходимости интеграла, определяющего тепловой поток. Таким образом, само по себе наличие примесей в кристалле не может обеспечить конечности теплового сопротивления диэлектрика.

Это не означает, однако, что примеси вообще не играют роли в установлении этого сопротивления. Дело в том, что рассеяние на примесных атомах не сохраняет квазиимпульс фононов, и в этом смысле оно может играть роль процессов переброса. В достаточно чистых образцах может существовать область низких температур, в которой эффективная частота $\nu_{\text{пр}}$ рассеяния на примесях (для фононов с $\omega \sim T$) занимает промежуточное положение между частотами нормальных и перебросных фонон-фононных столкновений:

$$\nu_N \gg \nu_{\text{пр}} \gg \nu_U. \qquad (70,4)$$

В таких условиях роль процессов переброса переходит к примесному рассеянию и формулы (69,6—8) остаются в силе, если заменить в них I_U на $I_{\text{пр}}$. В результате коэффициент теплопроводности определяется формулой (69,9) с $\nu_{\text{пр}}$ вместо ν_U:

$$\varkappa = \beta_1^2/\beta_2\nu_{\text{пр}}.$$

Согласно (70,2), $\nu_{\text{пр}} \propto \omega^4 \sim T^4$. Величины же β_1 и β_2 для акустических фононов пропорциональны T^3 (см. (69,10)). Поэтому мы приходим в рассматриваемой ситуации к закону $\varkappa \propto 1/T$.

§ 71. Гидродинамика фононного газа в диэлектрике

Приближенное сохранение квазиимпульса при условии малости длины пробега l_N для нормальных столкновений по сравнению с длиной пробега l_U для процессов переброса,

$$l_N/l_U \sim \nu_U/\nu_N \ll 1, \qquad (71,1)$$

делает систему фононов в кристалле при низких температурах во многих отношениях подобной обычному газу. Нормальные столкновения устанавливают внутреннее равновесие в каждом элементе объема газа (большом по сравнению с l_N), который может при этом двигаться с произвольной скоростью $\mathbf{V}$. Если скорость $\mathbf{V}$ и температура T заметно меняются лишь на расстояниях, больших по сравнению с l_N (и за времена, большие по сравнению с $1/\nu_N$), то для них можно получить систему «гидродинамических» уравнений. Построим их в линейном приближении по скорости $\mathbf{V}$ и градиенту температуры, которые будем считать малыми величинами одинакового порядка. Кроме того, для упрощения записи формул будем снова (как и в § 69) считать, что кристалл имеет кубическую симметрию.

Одно из искомых уравнений выражает собой закон сохранения энергии. Оно получается подстановкой в (67,3—4) функции распределения (69,2). Интегралы от $\omega(\mathbf{kV})\,\partial N_0/\partial\omega$ и от $\omega\mathbf{u}N_0$ обращаются в нуль при интегрировании по направлениям $\mathbf{k}$ (ср. примечание на стр. 352). Функция $N_0(\omega)$ зависит от координат и времени только через посредство T. Пренебрегая членом с произведением $\mathbf{V}\nabla T$, получим

$$\beta_3\frac{\partial T}{\partial t}+\beta_1 T\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}=0, \tag{71,2}$$

где

$$\beta_3=\partial E_0/\partial T, \tag{71,3}$$

E_0 — равновесная плотность энергии, а β_1 определено в (69,8).

Другое уравнение выражает собой сохранение (приближенное) квазиимпульса. Оно получается из кинетического уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla N=\mathrm{St}_N N+\mathrm{St}_U N \tag{71,4}$$

подстановкой в него N в виде (69,2), умножением на $\mathbf{k}$, интегрированием по d^3k и суммированием по сортам фононов. Интеграл от $\mathbf{k}\,\mathrm{St}_N N$ обращается в нуль в силу сохранения квазиимпульса при нормальных столкновениях. В результате получим

$$\beta_2 T\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\beta_1\nabla T=-\nu_U\beta_2 T\mathbf{V} \tag{71,5}$$

с β_2 и ν_U из (69,8). Уравнения (71,2) и (71,5) и составляют искомую систему гидродинамических уравнений для фононного газа в диэлектрике.

Экспоненциально малый (вместе с ν_U) член в правой стороне уравнения (71,5) представляет влияние процессов переброса. В пренебрежении этим членом квазиимпульс сохраняется строго. В таких условиях в фононном газе могут распространяться незатухающие волны, аналогичные волнам второго звука в сверхтекучей жидкости (*В. П. Пешков*, 1946). Действительно, исключив $\mathbf{V}$ из (71,2) и (71,5), получим тогда

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{\beta_1^2}{\beta_2\beta_3}\Delta T, \tag{71,6}$$

т. е. волновое уравнение, описывающее распространение колебаний температуры со скоростью

$$u_2=(\beta_1^2/\beta_2\beta_3)^{1/2}. \tag{71,7}$$

Как уже отмечалось, вклады в интегралы β_1, β_2, β_3 при низких температурах возникают в основном только от акустических ветвей спектра. Для линейных законов дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ интегралы пропорциональны T^3; при этом скорость (71,7) не зависит от температуры и имеет порядок величины скорости звука[1]).

До сих пор мы подразумевали, что размеры кристалла неограничены. При низких температурах, когда длина пробега фононов быстро растет, может стать реальной ситуация, когда длина пробега становится сравнимой или даже большой по сравнению с размерами кристалла L. Это относится в первую очередь к экспоненциально возрастающей длине l_U.

Рассмотрим теплопередачу в диэлектрике в условиях, когда $l_U \gg L$ (это условие будет уточнено ниже), но в то же время еще $l_N \ll L$; последнее условие позволяет пользоваться уравнениями фононной гидродинамики (*J. A. Sussmann, A. Thellung*, 1963; *Р. Н. Гуржи*, 1964).

Благодаря микроскопическим неоднородностям поверхности кристалла, отражение фононов от нее происходит обычно беспорядочным образом (как говорят, *диффузно*); это значит, что макроскопическая скорость фононного газа $\mathbf{V}$ обращается на границе в нуль. Но уравнения (71,2), (71,5) не допускают такого граничного условия; их решениями можно удовлетворить лишь условию обращения в нуль нормальной к поверхности компоненты скорости. Как и в гидродинамике обычных жидкостей, граничное условие исчезновения тангенциальной компоненты скорости требует учета вязкости жидкости.

В стационарном случае из уравнения (71,2) имеем $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, т. е. фононный газ ведет себя как несжимаемый. Учет вязкости приводит к появлению в правой части уравнения (71,5) члена с $\Delta\mathbf{V}$, подобного аналогичному члену в уравнении Навье—Стокса гидродинамики обычной вязкой жидкости. В стационарном случае

---

[1]) В изотропной жидкости с фононным энергетическим спектром (сверхтекучий гелий при низких температурах) имеется всего одна акустическая ветвь, в которой $\omega=uk$. При этом $\beta_1/\beta_2=u^2$, $\beta_1/\beta_3=1/3$ и скорость второго звука $u_2=u/\sqrt{3}$.

это уравнение принимает вид

$$\frac{\beta_1}{\beta_2 T}\nabla T = \mu\Delta\mathbf{V} - \nu_U\mathbf{V}. \qquad (71,8)$$

Величина μ имеет размерность см²/с и играет роль кинематической вязкости фононного газа¹). Ее вычисление требует в принципе решения соответствующего кинетического уравнения. Для оценки же по порядку величины можно воспользоваться обычной газокинетической формулой, согласно которой

$$\mu \sim l_N\bar{v} \sim u^2/\nu_N. \qquad (71,9)$$

Размерные эффекты играют преобладающую роль, когда в уравнении (71,8) можно пренебречь членом $\nu_U\mathbf{V}$ по сравнению с $\mu\Delta\mathbf{V}$. Пусть, например, речь идет о теплопередаче вдоль цилиндрического стержня с толщиной R. Последняя определяет характерную длину для изменения скорости $\mathbf{V}$, так что $\Delta\mathbf{V} \sim \mathbf{V}/R^2$. Мы видим, что членом $\nu_U\mathbf{V}$ можно пренебречь, если $\mu/R^2 \gg \nu_U$. С оценкой (71,9) это условие записывается как $l_U \gg l_{эфф}$, где

$$l_{эфф} \sim R^2/l_N \qquad (71,10)$$

играет роль эффективной длины пробега фононов в ограниченном теле. Напротив, при $l_{эфф} \gg l_U$ размеры тела несущественны и справедлив закон (69,14).

Процесс теплопередачи вдоль стержня при $l_U \gg l_{эфф}$ принимает характер пуазейлевского течения вязкого фононного газа. Его можно характеризовать эффективным коэффициентом теплопроводности, определяющим плотность потока энергии как $-\varkappa_{эфф}\nabla T$, где ∇T — градиент температуры вдоль стержня. Этот поток можно оценить, подставив (71,10) в выражение $\varkappa_{эфф} \sim Cul_{эфф}$. При низких температурах теплоемкость решетки $C \propto T^3$. Длина же $l_N \sim u/\nu_N \propto T^{-5}$ (согласно (69,15)). Поэтому эффективная теплопроводность

$$\varkappa_{эфф} \propto R^2T^8 \quad \text{при} \quad R^2/l_U \ll l_N \ll R; \qquad (71,11)$$

она убывает с понижением температуры.

Наконец, при еще более низких температурах, когда уже и длина $l_N \gg R$, столкновения фононов друг с другом становятся вообще несущественными (подобно кнудсеновской ситуации в сильно разреженных обычных газах). Роль длины пробега пере-

¹) Имея в виду лишь качественное исследование вопроса, мы полностью пренебрегаем здесь анизотропией кристалла. Следует иметь в виду, что даже при кубической симметрии вязкость описывается не скалярным коэффициентом вязкости, а тензором четвертого ранга, имеющим более одной независимой компоненты.

ходит тогда к размерам тела R и эффективная теплопроводность

$$\varkappa_{\text{эфф}} \sim CuR \propto T^3 R \tag{71,12}$$

(*H. B. G. Casimir*, 1938).

§ 72. Поглощение звука в диэлектрике. Длинные волны

Характер поглощения звука в диэлектрическом кристалле существенно зависит от соотношения между длиной волны и длиной свободного пробега l тепловых фононов. Если длина волны велика по сравнению с l ($fl \ll 1$, где $\mathbf{f}$ — волновой вектор звуковой волны), то применима макроскопическая теория, основанная на уравнениях теории упругости (см. VII, § 35). Согласно этой теории, коэффициент поглощения звука складывается из двух членов, определяющихся соответственно теплопроводностью и вязкостью среды. Оба члена пропорциональны квадрату частоты. Наша цель состоит здесь в определении их температурной зависимости.

Теплопроводностный вклад в коэффициент поглощения звука выражается, по порядку величины, формулой[1])

$$\gamma_{\text{тепл}} \sim \omega^2 \frac{\varkappa T \alpha^2 \rho}{uC^2}, \tag{72,1}$$

где α — коэффициент теплового расширения тела, C — теплоемкость единицы объема, ρ — плотность. При высоких температурах, $T \gg \Theta$, теплопроводность $\varkappa \propto 1/T$, а C и α от температуры не зависят (см. V, §§ 65, 67). Поэтому в этой области $\gamma_{\text{тепл}}$ не зависит от температуры. При низких же температурах температурная зависимость $\gamma_{\text{тепл}}$ в основном определяется (в идеальной решетке) экспоненциально возрастающей, при уменьшении T, теплопроводностью.

Обратимся к определению вязкостной части коэффициента поглощения звука (*А. И. Ахиезер*, 1938).

Производя макроскопическую деформацию кристаллической решетки, внешнее звуковое поле меняет закон дисперсии фононов. Длина волны тепловых фононов мала по сравнению с длиной волны звука; поэтому по отношению к тепловому фонону деформацию можно считать однородной, т. е. считать фонон находящимся в решетке, по-прежнему регулярной, но с несколько измененными периодами. В первом приближении по

[1]) Мы пишем, для определенности, коэффициент поглощения на единицу пути. Частотная и температурная зависимости остаются теми же и для коэффициента поглощения в единицу времени, поскольку оба определения отличаются лишь постоянным множителем — скоростью звука.