ходит тогда к размерам тела R и эффективная теплопроводность

$$\varkappa_{\text{эфф}} \sim CuR \propto T^3 R \qquad (71,12)$$

(*H. B. G. Casimir*, 1938).

§ 72. Поглощение звука в диэлектрике. Длинные волны

Характер поглощения звука в диэлектрическом кристалле существенно зависит от соотношения между длиной волны и длиной свободного пробега l тепловых фононов. Если длина волны велика по сравнению с l ($fl \ll 1$, где $\mathbf{f}$ — волновой вектор звуковой волны), то применима макроскопическая теория, основанная на уравнениях теории упругости (см. VII, § 35). Согласно этой теории, коэффициент поглощения звука складывается из двух членов, определяющихся соответственно теплопроводностью и вязкостью среды. Оба члена пропорциональны квадрату частоты. Наша цель состоит здесь в определении их температурной зависимости.

Теплопроводностный вклад в коэффициент поглощения звука выражается, по порядку величины, формулой[1])

$$\gamma_{\text{тепл}} \sim \omega^2 \frac{\varkappa T \alpha^2 \rho}{uC^2}, \qquad (72,1)$$

где α — коэффициент теплового расширения тела, C — теплоемкость единицы объема, ρ — плотность. При высоких температурах, $T \gg \Theta$, теплопроводность $\varkappa \propto 1/T$, а C и α от температуры не зависят (см. V, §§ 65, 67). Поэтому в этой области $\gamma_{\text{тепл}}$ не зависит от температуры. При низких же температурах температурная зависимость $\gamma_{\text{тепл}}$ в основном определяется (в идеальной решетке) экспоненциально возрастающей, при уменьшении T, теплопроводностью.

Обратимся к определению вязкостной части коэффициента поглощения звука (*А. И. Ахиезер*, 1938).

Производя макроскопическую деформацию кристаллической решетки, внешнее звуковое поле меняет закон дисперсии фононов. Длина волны тепловых фононов мала по сравнению с длиной волны звука; поэтому по отношению к тепловому фонону деформацию можно считать однородной, т. е. считать фонон находящимся в решетке, по-прежнему регулярной, но с несколько измененными периодами. В первом приближении по

[1]) Мы пишем, для определенности, коэффициент поглощения на единицу пути. Частотная и температурная зависимости остаются теми же и для коэффициента поглощения в единицу времени, поскольку оба определения отличаются лишь постоянным множителем — скоростью звука.

малой деформации частота $\omega(\mathbf{k})$ фонона в такой решетке связана с его частотой $\omega^{(0)}(\mathbf{k})$ в недеформированной решетке формулой вида

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega^{(0)}(\mathbf{k})(1 + \lambda_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}), \tag{72,2}$$

где

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

— тензор деформации ($\mathbf{U}$ — вектор смещения). Характеризующий кристалл тензор $\lambda_{\alpha\beta}$ зависит, вообще говоря, от $\mathbf{k}$; для длинноволновых акустических фононов с линейным законом дисперсии он не зависит, однако, от абсолютной величины $\mathbf{k}$.

В скобках в (72,2) должен был бы стоять еще и член вида $\lambda \operatorname{rot} \mathbf{U}$, выражающий собой тривиальное обстоятельство: если деформация приводит к повороту элемента объема решетки ($\operatorname{rot} \mathbf{U} \neq 0$), то меняется направление осей (обратной решетки), относительно которых должен определяться квазиимпульс фонона в законе дисперсии; член $\lambda \operatorname{rot} \mathbf{U}$ выражал бы соответствующий пересчет $\mathbf{k}$. Мы не пишем этот член в (72,2), так как заранее очевидно, что он не может отразиться на интересующей нас диссипации энергии в звуковой волне: реальный физический эффект — диссипация — не может зависеть от вектора $\operatorname{rot} \mathbf{U}$, отличного от нуля уже для простого поворота тела как целого.

Изменение функции распределения фононов, вызванное деформацией решетки, определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial N}{\partial T}\dot{T} = \operatorname{St} N, \tag{72,3}$$

где $\operatorname{St} N$ — интеграл фонон-фононных столкновений (67,6), а $\dot{T}$ — скорость изменения температуры в данной точке кристалла, неизбежно связанная с деформацией. Обычным образом, линеаризуя это уравнение и введя функцию χ согласно определению (67,15), сведем его к виду

$$\omega \frac{\partial N_0}{\partial \omega}\left(\lambda_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta} - \frac{\dot{T}}{T}\right) = I(\chi), \tag{72,4}$$

где $I(\chi)$ — линеаризованный интеграл столкновений (67,17). В левой части производная $\dot{\omega}$ выражена с помощью (72,2); индекс (0) у невозмущенной частоты здесь и ниже опускаем.

Производную $\dot{T}$ можно в принципе выразить с помощью того же тензора $\lambda_{\alpha\beta}$. После умножения обеих сторон уравнения (72,4) на ω, интегрирования по $\mathbf{k}$-пространству и суммирования по всем ветвям спектра фононов правая сторона уравнения обращается в нуль — в силу сохранения энергии при столкновениях. Левая же сторона уравнения дает

$$\frac{\dot{T}}{T} = \overline{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}, \tag{72,5}$$

где $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ — усредненный по $\omega^2 \partial N_0/\partial\omega$ тензор $\lambda_{\alpha\beta}$. В обоих предельных случаях — высоких и низких температур — $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ не зависит от температуры. Действительно, при $T \gg \Theta$ в усреднении существенны фононы с независящим от температуры квазиимпульсом $k \sim k_{\max} \sim 1/d$. При $T \ll \Theta$ существенны длинноволновые акустические фононы, для которых $\lambda_{\alpha\beta}$ не зависит от k, и потому усреднение тоже не вносит зависимости от температуры.

Обозначив $\lambda_{\alpha\beta} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}$, запишем кинетическое уравнение в виде

$$\omega \frac{\partial N_0}{\partial\omega} \tilde{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta} = I(\chi). \tag{72,6}$$

Далее, выведем формулу, определяющую диссипацию энергии в неравновесном фононном газе. Для этого исходим из выражения энтропии единицы объема бозе-газа

$$S = \sum_g \int \{(N+1)\ln(N+1) - N\ln N\} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{72,7}$$

(см. V, § 55). Продифференцировав это выражение по времени, находим

$$\dot{S} = \sum_g \int \dot{N} \ln\frac{N+1}{N} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{72,8}$$

Заменив здесь $\dot{N}$ интегралом $\mathrm{St}\,N$ (ср. § 4) и произведя определенные переобозначения переменных $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ в двух членах выражения (67,6), приведем $\dot{S}$ к виду

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \sum_{g_1 g_2 g_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1)\,\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \ln\frac{(N_1+1)N_2N_3}{N_1(N_2+1)(N_3+1)} \times$$
$$\times [(N_1+1)N_2N_3 - N_1(N_2+1)(N_3+1)] \frac{d^3k_1\,d^3k_2}{(2\pi)^6}.$$

Умножив это выражение на T, получим диссипативную функцию — энергию, диссипируемую в единицу времени в единице объема. Подставив сюда $N = N_0 + \delta N$ (с δN, представленным в виде (67,15)) и ограничиваясь первыми, квадратичными, членами разложения по δN, получим

$$T\dot{S} = \frac{1}{2T} \sum_{g_1 g_2 g_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1)\,\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times$$
$$\times (N_{01}+1) N_{02} N_{03} (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3)^2 \frac{d^3k_1\,d^3k_2}{(2\pi)^6}. \tag{72,9}$$

Написанных формул достаточно для определения температурной зависимости коэффициента поглощения звука. Рассмотрим сначала область высоких температур.

В этом случае интеграл столкновений $I(\chi)$ содержит температуру в виде множителя T^2 (см. начало § 68). В левой же стороне кинетического уравнения (72,6) имеем $\omega\,\partial N_0/\partial\omega \approx -T/\omega$, причем для основной массы фононов частота $\omega \sim \Theta$ не зависит от температуры. Таким образом, найдем, что для этих частот

$$\chi \sim \frac{1}{T}\dot{\lambda}_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}.$$

Из выражения (72,9), в котором надо положить $N_0 \approx T/\omega \gg 1$, найдем теперь, что диссипативная функция не зависит от температуры. То же самое относится и к коэффициенту поглощения, получающемуся делением диссипативной функции на независящую от температуры величину — плотность потока энергии в звуковой волне. Таким образом, при $T \gg \Theta$ вязкостная, как и теплопроводная части коэффициента поглощения звука не зависят от температуры.

Для низких температур необходимо прежде всего подчеркнуть принципиальное отличие от задачи о теплопроводности: конечное значение коэффициента поглощения звука получается уже в пренебрежении процессами переброса (частота которых при низких температурах мала). Напомним, что в случае теплопроводности отсутствие решения у кинетического уравнения без учета процессов переброса проявлялось в противоречии, возникающем при умножении этого уравнения на $\mathbf{k}$ и интегрировании по всему фононному спектру: правая сторона уравнения обращается в нуль, между тем как левая сторона заведомо отлична от нуля (ср. (69,6)). Для уравнения же (72,6) такого противоречия не возникает: поскольку его левая часть — четная функция $\mathbf{k}$, то после умножения на $\mathbf{k}$ она становится нечетной функцией и интегрирование по d^3k обращает ее в нуль. При этом подразумевается, что обращается в нуль также и интеграл от члена с оператором процессов переброса — интеграл от $\mathbf{k}I_U(\chi)$. Поскольку это не происходит автоматически в силу какого-либо закона сохранения, то тем самым налагается определенное условие на решение кинетического уравнения — функция $\chi(\mathbf{k})$ должна быть четной по $\mathbf{k}$ (тогда $\mathbf{k}I_U(\chi)$ — нечетная функция; легко видеть, что оператор I не меняет четности функции χ). Этим требованием устраняется произвол, связанный с существованием (в отсутствие процессов переброса) нечетного по $\mathbf{k}$ «паразитного» решения вида $\chi = \mathbf{k}\delta\mathbf{V}$, и обеспечивается правильный предельный переход к отсутствию этих процессов.

При $T \ll \Theta$ основную роль в интеграле столкновений (и в диссипативной функции) играют фононы с энергией $\omega \sim T$. Это — длинноволновые фононы акустических ветвей спектра; их частоты линейно зависят от $\mathbf{k}$, а потому их $k \sim T/u$. Согласно (66,14), для столкновений таких фононов функция w в интеграле (67,17):

$w \propto kk_1k_2$. Функция распределения N_0 зависит только от отношения ω/T, так что при $\omega \sim T$ имеем $N_0 \sim 1$. Интегрирование производится по $d^3k_1 = k_1^2\,dk_1\,do_1$, причем по k_1 — по области $\sim T$. Каждый множитель k, k_1, k_2 вносит, следовательно, в интеграл по множителю T, а δ-функция — множитель $1/T$. Таким образом, найдем, что весь интеграл в смысле своей зависимости от температуры оценивается как χT^4. Левая же сторона кинетического уравнения (72,6) при $\omega \sim T$ от температуры не зависит. Отсюда находим, что для $\omega \sim T$

$$\chi \propto T^{-4}\bar{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}.$$

После этого аналогичная оценка интеграла (72,9) приводит к результату, что диссипативная функция, а с нею и вязкостная часть коэффициента поглощения звука обратно пропорциональны T. Таким образом,

$$\gamma_{\text{вязк}} \propto \omega^2/T \quad \text{при} \quad T \ll \Theta. \tag{72,10}$$

Отсутствие необходимости в процессах переброса приводит к тому, что эта часть коэффициента поглощения возрастает с понижением температуры лишь по степенному, а не по экспоненциальному закону.

Использование в изложенном выводе диссипативной функции позволило избежать вопроса о выражении тензора вязких напряжений в кристалле через функцию распределения фононов; нетривиальность этого вопроса связана с тем, что речь идет о тензоре плотности потока истинного импульса, отнюдь не совпадающего с квазиимпульсом фононов. Покажем, каким образом это выражение можно в свою очередь получить из вида диссипативной функции.

Для этого снова исходим из интеграла (72,8), представив в нем на этот раз производную $\dot{N}$ в виде выражения, стоящего в левой стороне кинетического уравнения (72,6). Логарифм же в подынтегральном выражении переписываем в виде (см. (67,16))

$$-\ln\frac{N}{N+1} = -\ln\left[\frac{N_0}{N_0+1}\left(1+\frac{\chi}{T}\right)\right] \approx \frac{\omega-\chi}{T}.$$

В результате находим

$$T\dot{S} = \sum_g \int \omega\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}\delta N\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\cdot\dot{U}_{\alpha\beta}, \tag{72,11}$$

где $\delta N = -\chi\,\partial N_0/\partial\omega$ (член же с множителем ω вместо χ тождественно обращается в нуль в силу определения $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}$). Вместо $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ здесь можно писать просто $\lambda_{\alpha\beta}$, так как интеграл с постоянным множителем $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ обращается в нуль в силу налагаемого на δN дополнительного условия (67,14).

С другой стороны, диссипативная функция (отнесенная к единице объема) выражается через тензор вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ как $-\sigma'_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}$ (ср. VII, § 34). Сравнение с (72,11) приводит, таким образом, к следующему выражению для тензора вязких напряжений:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = -\sum_{g} \int \omega\lambda_{\alpha\beta}\delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{72,12}$$

(*В. Л. Гуревич*).

§ 73. Поглощение звука в диэлектрике. Короткие волны

В обратном случае коротких длин волн, $fl \gg 1$, процесс затухания звуковой волны можно рассматривать как результат поглощения одиночных квантов звука при их столкновениях с тепловыми фононами (*Л. Д. Ландау, Ю. Б. Румер*, 1937). Допустимость такого подхода требует, чтобы энергия и импульс тепловых фононов были определены достаточно точно: при изменении в результате поглощения звукового кванта они должны попасть в область вне квантовой неопределенности, связанной с конечностью длины пробега; это условие обеспечивается неравенством $fl \gg 1$. Фактически такая ситуация может осуществляться лишь при низких температурах, когда длина пробега становится достаточно большой.

В первом приближении, т. е. при учете процессов с участием наименьшего числа фононов, речь идет о трехфононных процессах:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{f} = \mathbf{k}_2, \quad \omega_1 + \omega = \omega_2, \tag{73,1}$$

где ω, $\mathbf{f}$ — энергия и квазиимпульс звукового кванта, а ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ относятся к тепловым фононам. Энергии и квазиимпульсы тепловых фононов ω_1, $\omega_2 \sim T$; k_1, $k_2 \sim T/u$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$\hbar\omega \ll T. \tag{73,2}$$

Тогда ω_1, ω_2 и k_1, k_2 будут велики по сравнению с ω и f.

Как мы видели в § 68, законы сохранения (73,1) могут быть выполнены лишь, если скорость теплового фонона превышает скорость поглощаемых (или испускаемых) звуковых квантов. Не вдаваясь в обсуждение различных возможных случаев, будем считать, что звуковая волна не является «продольной» (т. е. не отвечает акустической ветви фононного спектра с наибольшей скоростью), так что указанное условие может быть выполнено. Ввиду малости ω и f, начальный и конечный тепловые фононы относятся, вообще говоря, к одной и той же аку-