С другой стороны, диссипативная функция (отнесенная к единице объема) выражается через тензор вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ как $-\sigma'_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}$ (ср. VII, § 34). Сравнение с (72,11) приводит, таким образом, к следующему выражению для тензора вязких напряжений:

$$\sigma'_{\alpha\beta}=-\sum_{s}\int\omega\lambda_{\alpha\beta}\delta N\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{72,12}$$

(*В. Л. Гуревич*).

§ 73. Поглощение звука в диэлектрике. Короткие волны

В обратном случае коротких длин волн, $fl\gg 1$, процесс затухания звуковой волны можно рассматривать как результат поглощения одиночных квантов звука при их столкновениях с тепловыми фононами (*Л. Д. Ландау, Ю. Б. Румер*, 1937). Допустимость такого подхода требует, чтобы энергия и импульс тепловых фононов были определены достаточно точно: при изменении в результате поглощения звукового кванта они должны попасть в область вне квантовой неопределенности, связанной с конечностью длины пробега; это условие обеспечивается неравенством $fl\gg 1$. Фактически такая ситуация может осуществляться лишь при низких температурах, когда длина пробега становится достаточно большой.

В первом приближении, т. е. при учете процессов с участием наименьшего числа фононов, речь идет о трехфононных процессах:

$$\mathbf{k}_1+\mathbf{f}=\mathbf{k}_2,\quad \omega_1+\omega=\omega_2, \tag{73,1}$$

где ω, $\mathbf{f}$ — энергия и квазиимпульс звукового кванта, а ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ относятся к тепловым фононам. Энергии и квазиимпульсы тепловых фононов ω_1, $\omega_2\sim T$; k_1, $k_2\sim T/u$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$\hbar\omega\ll T. \tag{73,2}$$

Тогда ω_1, ω_2 и k_1, k_2 будут велики по сравнению с ω и f.

Как мы видели в § 68, законы сохранения (73,1) могут быть выполнены лишь, если скорость теплового фонона превышает скорость поглощаемых (или испускаемых) звуковых квантов. Не вдаваясь в обсуждение различных возможных случаев, будем считать, что звуковая волна не является «продольной» (т. е. не отвечает акустической ветви фононного спектра с наибольшей скоростью), так что указанное условие может быть выполнено. Ввиду малости ω и f, начальный и конечный тепловые фононы относятся, вообще говоря, к одной и той же акустической ветви фононного спектра; при низких температурах они являются длинноволновыми.

Вероятности испускания или поглощения фонона в трехфононном процессе даются формулами (66,9) или (66,11). При этом числа заполнения $N_1 \equiv N(\mathbf{k}_1)$ и $N_2 \equiv N(\mathbf{k}_2)$ даются равновесной функцией распределения Планка (67,9). Макроскопическая же звуковая волна соответствует очень большому числу заполнения заданного фононного состояния $\mathbf{f}$; по сравнению с этим числом единицей можно, конечно, пренебречь. Опустив множитель $N(\mathbf{f})$, мы получим вероятность, отнесенную к одному звуковому кванту.

Таким образом, вероятность поглощения звукового кванта при его столкновениях с тепловыми фононами со всеми возможными значениями $\mathbf{k}_1$ дается интегралом

$$\int Ak_1k_2fN_1(N_2+1)\,\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}. \tag{73,3}$$

Вероятность же обратного процесса испускания фонона f всевозможными фононами $\mathbf{k}_2$ есть

$$\int Ak_1k_2fN_2(N_1+1)\,\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}. \tag{73,4}$$

Фигурирующая в формулах (66,9), (66,11) функция w написана, согласно (66,14), в виде Ak_1k_2f с учетом того, что все три фонона — длинноволновые (A — функция направлений всех фононов).

Поглощение фононов (относительная скорость убывания их числа) определяется разностью этих двух вероятностей. Поскольку частота ω мала по сравнению с ω_1 и ω_2, то

$$N_1(N_2+1)-(N_1+1)N_2=N_1-N_2=-\frac{\partial N_1}{\partial\omega_1}\omega.$$

Таким образом, коэффициент поглощения

$$\gamma \sim \omega f\int Ak_1k_2\left|\frac{\partial N_1}{\partial\omega_1}\right|\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)\,d^3k_1. \tag{73,5}$$

Нас интересует зависимость этой величины от частоты звука ω и от температуры кристалла T. Она всецело определяется тем фактом, что все фигурирующие в (73,5) частоты — линейные функции волновых векторов. Для упрощения рассуждений достаточно считать, что $\omega=Uf$, $\omega_1=uk_1$, $\omega_2=uk_2$, где U и u — независящие от направления скорости.

Ввиду малости f можно положить $k_1\approx k_2$. По той же причине

$$\omega_2-\omega_1\approx\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{k}_1}\mathbf{f}=uf\cos\theta=\omega\frac{u}{U}\cos\theta,$$

где θ — угол между $\mathbf{f}$ и $\mathbf{k}$. Тогда имеем

$$\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)=\frac{1}{\omega}\delta\left(1-\frac{u}{U}\cos\theta\right)$$

и интеграл (73,5) принимает вид

$$\gamma\infty\omega\int Ak_1^2\left|\frac{\partial N_1}{\partial\omega}\right|\delta\left(1-\frac{u}{U}\cos\theta\right)k_1^2\,dk_1\,d\cos\theta, \qquad (73,6)$$

или, после устранения δ-функции,

$$\gamma\infty\omega\int k_1^4\left|\frac{\partial N}{\partial k_1}\right|dk_1.$$

Поскольку N_1 — функция только от отношения $\omega_1/T=uk_1/T$ (ввиду быстрой сходимости интегрирование по k_1 можно распространить до ∞), оставшийся интеграл пропорционален T^4. Таким образом,

$$\gamma\infty\omega T^4. \qquad (73,7)$$

Отметим, что коэффициент поглощения звука оказывается здесь пропорциональным первой степени частоты.

Отметим также, что при принятом выше условии (73,2) рассмотренный механизм затухания звука вполне аналогичен затуханию Ландау в плазме. Роль «резонансных электронов» в данном случае играют фононы, движущиеся в фазе со звуковой волной. Естественно поэтому сходство между (73,6) и формулой (30,1) затухания Ландау.