КВАНТОВЫЕ ЖИДКОСТИ

§ 74. Кинетическое уравнение для квазичастиц в ферми-жидкости

Кинетическое уравнение для квазичастиц в нормальной ферми-жидкости уже рассматривалось в другом томе этого курса в связи с вопросом о распространении колебаний в этой жидкости (см. IX, §§ 4, 5); для этих вопросов интеграл столкновений в уравнении был несуществен. Продолжим теперь изучение кинетического уравнения, имея в виду его применение к диссипативным процессам, связанным именно со столкновениями.

Квазичастицы в ферми-жидкости обладают спином 1/2. Соответственно этому, в общем случае их функция распределения является матрицей по отношению к спиновым переменным. Но в широкой категории задач достаточно рассматривать распределения, не зависящие от спиновых переменных. В таких случаях функция распределения сводится к скалярной функции $n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, нормированной так, что $n\,d^3p/(2\pi\hbar)^3$ есть число квазичастиц (в единице объема) с импульсами в интервале d^3p и с заданной проекцией спина; это и будет подразумеваться ниже в §§ 74—76.

Характерное свойство спектра ферми-жидкости состоит в том, что энергия квазичастиц ε является функционалом от функции распределения. Когда последняя меняется на малую величину,

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \tag{74,1}$$

(n_0 — равновесное распределение), энергия меняется на

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}')\,\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{74,2}$$

где $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — функция взаимодействия квазичастиц. Таким образом, распределению (74,1) отвечает энергия квазичастиц

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{74,3}$$

где $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ — энергия, отвечающая равновесному распределению.

Кинетическое уравнение гласит:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{St}\,n. \tag{74,4}$$

Его характерная особенность состоит в том, что в неоднородной жидкости левая часть уравнения содержит член с производной $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ даже в отсутствие внешнего поля—за счет зависимости ε от координат, вносимой выражением (74,3).

Интеграл столкновений в правой стороне уравнения (74,4) имеет вид

$$\operatorname{St} n=\int w(\mathbf{p},\mathbf{p}_1;\mathbf{p}',\mathbf{p}_1')\left[n'n_1'(1-n)(1-n_1)-nn_1(1-n')(1-n_1')\right]\times \\ \times\delta(\varepsilon+\varepsilon_1-\varepsilon'-\varepsilon_1')\frac{d^3p_1\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^6}, \qquad (74,5)$$

где n, n_1, n', n_1'—функции импульсов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}_1'$ сталкивающихся квазичастиц. Закон сохранения импульса при столкновениях предполагается уже учтенным, так что $\mathbf{p}+\mathbf{p}_1=\mathbf{p}'+\mathbf{p}_1'$; интегрирование в (74,5) производится поэтому всего по двум (а не по трем) импульсам. Сохранение же энергии обеспечивается δ-функцией, выписанной в явном виде. Наконец, w—функция импульсов, определяющая вероятность столкновения. Первый и второй члены в фигурных скобках определяют соответственно числа квазичастиц, приходящих в заданное квантовое состояние и уходящих из него в результате столкновений. Эти члены отличаются от аналогичных членов в интеграле столкновений больцмановского газа множителями $(1-n)$,... Появление этих множителей связано со статистикой Ферми, в силу которой столкновения могут привести квазичастицы лишь в еще не занятые состояния.

К столкновениям квазичастиц в ферми-жидкости борновское приближение, вообще говоря, неприменимо. Тем не менее вероятности прямого и обратного процессов рассеяния можно считать одинаковыми. Мы рассматриваем величины, уже усредненные по направлениям спинов квазичастиц. В этих условиях вероятность рассеяния оказывается зависящей только от начальных и конечных импульсов сталкивающихся квазичастиц. Это обстоятельство позволяет применить здесь те же соображения, которые были использованы в § 2 при выводе принципа детального равновесия в форме (2,8). При этом существенно, что в ферми-жидкости по-прежнему имеет место инвариантность относительно пространственной инверсии. Таким образом, приходим к равенству

$$w(\mathbf{p}',\mathbf{p}_1';\mathbf{p},\mathbf{p}_1)=w(\mathbf{p},\mathbf{p}_1;\mathbf{p}',\mathbf{p}_1'),$$

уже использованному в интеграле столкновений (74,5). Функция w зависит, вообще говоря, от чисел заполнения состояний и тем самым—от температуры. Но ввиду малости температуры (существенной для всей теории ферми-жидкости) под w в интеграле столкновений следует понимать функцию, вычисленную для $T=0$.

Как и следовало, интеграл (74,5) тождественно обращается в нуль при подстановке в качестве n равновесной функции распределения Ферми

$$n_0(\varepsilon)=\left[\exp\frac{\varepsilon-\mu}{T}+1\right]^{-1}. \tag{74,6}$$

Действительно, заметив, что

$$\frac{n_0}{1-n_0}=\exp\left(-\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right),$$

сразу видим, что в силу закона сохранения энергии имеет место равенство

$$\frac{n_0 n_{01}}{(1-n_0)(1-n_{01})}=\frac{n_0' n_{01}'}{(1-n_0')(1-n_{01}')}. \tag{74,7}$$

Выясним с помощью кинетического уравнения, каким образом выражаются, в терминах функции распределения, законы сохранения массы, энергии и импульса ферми-жидкости. Зависимость энергии квазичастиц от их распределения придает этому вопросу определенную специфику.

Проинтегрируем обе стороны уравнения (74,4) по $2d^3p/(2\pi\hbar)^3$ (множитель 2 учитывает два возможных направления спина). В силу сохранения числа квазичастиц при столкновениях, интеграл от $\operatorname{St} n$ обращается в нуль. В левой же стороне уравнения интеграл от члена $-(\partial n/\partial \mathbf{p})(\partial\varepsilon/\partial \mathbf{r})$ преобразуем по частям, в результате чего уравнение принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{i}=0,$$

где N — плотность числа квазичастиц,

$$\mathbf{i}=\langle\mathbf{v}\rangle, \tag{74,8}$$

а $\mathbf{v}=\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — скорость квазичастиц[1]). Это — уравнение непрерывности для квазичастиц, так что $\mathbf{i}$ — плотность их потока. В силу совпадения числа квазичастиц в ферми-жидкости с числом истинных частиц, $\mathbf{i}$ есть в то же время плотность потока истинных частиц, так что $\mathbf{i}=\langle\mathbf{p}/m\rangle$.

Произведем теперь с уравнением (74,4) те же операции, предварительно умножив обе его стороны на $\mathbf{p}$. Интеграл от $\mathbf{p}\operatorname{St} n$ обращается в нуль в силу сохранения суммарного импульса квазичастиц при столкновениях. Левая же сторона, написанная

---

[1]) Здесь и ниже в этом параграфе символ $\langle\ldots\rangle$ означает интегрирование по распределению n:

$$\langle\ldots\rangle=\int\ldots n\,\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

в векторных компонентах, дает

$$\frac{\partial \langle p_\alpha \rangle}{\partial t} + \int p_\alpha \left(\frac{\partial n}{\partial x_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta} - \frac{\partial n}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} \right) \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Подынтегральное выражение во втором члене переписываем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta} n \right) + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left(p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} n \right).$$

Интегрирование обращает третий член в нуль, а второй дает производную $\partial E/\partial x_\alpha$ от плотности энергии жидкости E; напомним, что энергия квазичастиц в ферми-жидкости определяется именно по вариации внутренней энергии:

$$\delta E = \int \varepsilon \delta n \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{74,9}$$

Таким образом, получаем уравнение сохранения импульса в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p_\alpha \rangle + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,$$

где тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{\alpha\beta} = \langle p_\alpha v_\beta \rangle + \delta_{\alpha\beta} (\langle \varepsilon \rangle - E). \tag{74,10}$$

Наконец, умножив обе стороны уравнения (74,4) на ε и проинтегрировав, аналогичным образом получим уравнение сохранения энергии,

$$\partial E/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

где плотность потока энергии

$$\mathbf{q} = \langle \varepsilon \mathbf{v} \rangle. \tag{74,11}$$

В равновесии все потоки $\mathbf{i}$, $\mathbf{q}$, $\Pi_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль. Получим для них выражения, линейные по малой поправке δn в возмущенном распределении (74,1).

Равновесная функция n_0 зависит только от энергии квазичастицы, причем сама эта энергия отвечает именно равновесному распределению. Отметив это обстоятельство индексом нуль у ε, запишем определение (74,1) в более точном виде:

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\varepsilon_0) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{74,12}$$

Если же выразить n_0 в функции реальной энергии квазичастицы ε, то надо написать

$$n_0(\varepsilon_0) = n_0(\varepsilon) - \delta\varepsilon \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$$

и тогда возмущенная функция распределения представится в виде

$$n(\mathbf{r},\ \mathbf{p}) = n_0(\varepsilon) + \delta\tilde{n}(\mathbf{r},\ \mathbf{p}), \tag{74,13}$$

$$\delta\tilde{n} = \delta n - \delta\varepsilon\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\int f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\delta n(\mathbf{r},\ \mathbf{p}')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Поскольку в интегралах (74,8—11) ε и $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — уже реальные энергия и скорость квазичастицы, то достаточно подставить в них n в виде (74,13) и мы сразу же получим

$$\mathbf{i} = \int \mathbf{v}\delta\tilde{n}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},\quad \mathbf{q} = \int \varepsilon\mathbf{v}\delta\tilde{n}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},\quad \Pi_{\alpha\beta} = \int p_\alpha v_\beta\delta\tilde{n}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{74,14}$$

(в последнем выражении использовано также (74,9)). Теперь, когда выделены члены первого порядка по $\delta\tilde{n}$, в интегралах (74,14) уже можно, конечно, понимать ε как $\varepsilon_0(\mathbf{p})$.

Подобно тому, как мы это уже неоднократно делали, представим δn в виде

$$\delta n = -\psi\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}. \tag{74,15}$$

В данном случае выделение множителя $\partial n_0/\partial\varepsilon$ имеет особый смысл. Возмущение δn сконцентрировано в зоне размытости распределения Ферми. В той же зоне заметно отлична от нуля и производная $\partial n_0/\partial\varepsilon$; после выделения этого множителя остающаяся функция ψ будет уже медленно меняющейся. Наряду с (74,15) будем писать

$$\delta\tilde{n} = -\varphi\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = \frac{n_0(1-n_0)}{T}\varphi, \tag{74,16}$$

где

$$\varphi = \psi - \int f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\frac{\partial n_0(\varepsilon')}{\partial\varepsilon'}\psi(\mathbf{r},\ \mathbf{p}')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{74,17}$$

В нулевом приближении по малому отношению T/ε_F функцию $n_0(\varepsilon)$ можно заменить ступенчатой функцией, обрывающейся на граничной энергии ε_F. Тогда

$$\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \tag{74,18}$$

и интегрирование по d^3p сводится к интегрированию по ферми-поверхности $\varepsilon = \varepsilon_F$. Элемент объема между двумя бесконечно близкими изоэнергетическими поверхностями в импульсном пространстве равен

$$\frac{dS\,d\varepsilon}{|\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}|}, \tag{74,19}$$

где dS — элемент площади изоэнергетической поверхности. Поэтому интегрирование по d^3p преобразуется в интегрирование по ферми-поверхности формулой

$$\int \ldots \delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\, d^3p = \int \ldots \frac{dS_F}{v_F}, \tag{74,20}$$

где v_F — значение скорости на ферми-поверхности. В (74,20) еще не использована сферичность поверхности; на сфере $dS_F = p_F^2\, do$ с постоянным p_F.

После такого преобразования определение (74,17) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_F')\, \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}_F') \frac{dS_F'}{v_F'(2\pi\hbar)^3}, \tag{74,21}$$

где $\mathbf{p}_F$ обозначает импульс (с переменным направлением!) на ферми-поверхности. Выражение потока частиц:

$$\mathbf{i} = \int \frac{\mathbf{v}_F}{v_F} \varphi \frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \tag{74,22}$$

и аналогично для потока импульса. В потоке же энергии приближение (74,18) заведомо недостаточно: оно свело бы $\mathbf{q}$ просто к конвективному переносу энергии $\varepsilon_F\mathbf{i}$ — первому члену в выражении

$$\mathbf{q} = \varepsilon_F\mathbf{i} - \int \mathbf{v}(\varepsilon-\varepsilon_F) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varphi \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{74,23}$$

Для проведения линеаризации интеграла столкновений надо заметить, что он обращается в нуль равновесным распределением $n_0(\varepsilon)$ как функцией реальной энергии ε[1]. Поэтому линеаризация осуществляется подстановкой n в виде (74,13), (74,16). Вычисления производятся подобно тому, как это было сделано при переходе от (67,6) к (67,17). Пишем выражение в квадратных скобках в (74,5) в виде

$$(1-n)(1-n_1)(1-n')(1-n_1')\left[\frac{n'}{1-n'}\frac{n_1'}{1-n_1'} - \frac{n}{1-n}\frac{n_1}{1-n_1}\right]$$

и замечаем, что

$$\delta\frac{n}{1-n} = \frac{n_0}{1-n_0}\frac{\varphi}{T}.$$

[1]) Подчеркнем общий характер этого замечания. Оно относится к любому интегралу столкновений с участием фермиевских квазичастиц, а не только к интегралу (74,5).

В результате получим

$$\mathrm{St}\, n \equiv I(\varphi) = \frac{1}{T}\int w n_0 n_{01}(1-n_0')(1-n_{01}')(\varphi'+\varphi_1'-\varphi-\varphi_1)\times$$
$$\times\delta(\varepsilon'+\varepsilon_1'-\varepsilon-\varepsilon_1)\frac{d^3p_1 d^3p'}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (74{,}24)$$

Обратим внимание на то, что искомое (при решении кинетического уравнения) возмущение функции распределения входит в интеграл столкновений в виде того же $\delta\tilde{n}$, которое фигурирует и в выражениях потоков (74,14). Если в левой стороне кинетического уравнения (74,4) членов с δn вообще не надо учитывать (как в задачах о вычислении коэффициентов теплопроводности и вязкости — см. следующий параграф), то функция взаимодействия квазичастиц $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ не фигурирует явным образом в системе получающихся уравнений: уравнения с f-функцией для неизвестного $\delta\tilde{n}$ такие же, какими они были бы при $f \equiv 0$ для неизвестного δn. Другими словами, в таких задачах «ферми-жидкостные» эффекты не проявляются, и задачи формально тождественны с таковыми для ферми-газа.

Покажем, что такая же ситуация имеет место и в определенной категории случаев, когда в левой стороне кинетического уравнения должны быть сохранены члены первого порядка по δn. При независящей от координат функции n_0 эти члены таковы:

$$\frac{\partial\,\delta n}{\partial t}+\frac{\partial\,\delta n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}}-\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial \mathbf{r}}=$$
$$=\frac{\partial\,\delta n}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\,\delta n}{\partial \mathbf{r}}-\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

С $\delta\tilde{n}$ из (74,13) они сводятся к виду

$$\frac{\partial\,\delta n}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\,\delta\tilde{n}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (74{,}25)$$

Если производной по времени можно пренебречь, то и здесь будет фигурировать только $\delta\tilde{n}$.

Эти утверждения сохраняют силу не только для электрически нейтральной ферми-жидкости, о которой здесь идет речь, но и для электронной жидкости в металлах, которая будет рассматриваться в следующей главе. Имея в виду этот объект и чтобы не возвращаться вновь к этому вопросу, сделаем уже здесь несколько дополнительных замечаний.

Если квазичастицы несут электрический заряд $-e$, то в присутствии электромагнитного поля в производной $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$

появляется дополнительный член—действующая на заряд лоренцева сила. Соответственно в левой стороне кинетического уравнения появляется член

$$-e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{B}\right]\right)\frac{\partial n}{\partial\mathbf{p}}.$$

Электрическое поле обычно предполагается слабым и в члене $-e\mathbf{E}\,\partial n/\partial\mathbf{p}$ достаточно положить $n=n_0$. Член же с магнитным полем обращается тождественно в нуль для функции $n_0(\varepsilon)$, зависящей только от ε. Но если поле сильное, то может оказаться необходимым сохранение также и членов первого порядка по δn. Эти члены таковы:

$$-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta n}{\partial\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\left[\frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{B}\right]\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}}=-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\left\{\frac{\partial\,\delta n}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\right\}$$

(где $\mathbf{v}=\partial\varepsilon_0/\partial\mathbf{p}$). В фигурной скобке можно внести множитель $\partial n_0/\partial\varepsilon$, зависящий только от ε, под знак $\partial/\partial\mathbf{p}$ (его производная направлена вдоль $\mathbf{v}$ и дает нуль при умножении на $[\mathbf{vB}]$). В результате эти члены сведутся к виду

$$-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta\tilde{n}}{\partial\mathbf{p}}, \tag{74,26}$$

снова содержащему только $\delta\tilde{n}$.

§ 75. Теплопроводность и вязкость ферми-жидкости

Температурные зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности ферми-жидкости могут быть установлены уже из простых качественных соображений (*И. Я. Померанчук*, 1950).

Согласно элементарной газокинетической формуле (8,11), коэффициент вязкости $\eta\sim mN\bar{v}l$, где m—масса частиц, N—плотность их числа, $\bar{v}$—средняя тепловая скорость, l—длина свободного пробега. В данном случае роль частиц играют квазичастицы, но, поскольку числа тех и других совпадают, произведение mN есть независящая от температуры величина—плотность жидкости[1]). Скорость $\bar{v}\sim v_F$, где v_F—независящая от температуры скорость на ферми-поверхности. Длина пробега $l\sim v_F\tau$, где τ—время между столкновениями квазичастиц. Последнее меняется с температурой как T^{-2} (см. IX, § 1), так что и вязкость

$$\eta\propto T^{-2}. \tag{75,1}$$

[1]) Поскольку мы ищем предельный закон зависимости $\eta(T)$ при низких температурах, то для всех величин, стремящихся при $T\to 0$ к конечному пределу, подразумевается, конечно, именно этот предел.