$=v_F(p-p_F)$. Во всех местах, где импульсы фигурируют не в виде разности $p-p_F$, можно положить $p=p_F$, а скорость можно положить везде равной v_F. В частности, это можно сделать в w, которая становится в результате функцией только от углов, определяющих относительную ориентацию векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}'_1$. При заданных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$ закон сохранения импульса фиксирует угол между векторами $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}'_1=\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'$; интегрирование по этому углу устраняет δ-функцию в интеграле столкновений. После этого остаются интегрирования по абсолютным величинам p_1 и p' (помимо интегрирований по остальным угловым переменным). Интегрирование по ним заменяем интегрированием по $T^2 du_1 du'$, где $u=(\varepsilon-\mu)/T=v_F(p-p_F)/T$ — переменные, от которых зависят функции распределения n_0; ввиду быстрой сходимости эти интегрирования можно распространить от $-\infty$ до ∞. В результате найдем, что весь интеграл $I(\varphi)$ пропорционален T, а решение уравнения (75,3) будет иметь вид

$$\varphi=-T^{-2}g(u)\,\mathbf{v}\nabla T.$$

После подстановки этой функции в (74,23) и интегрирования по направлениям $\mathbf{v}$ тепловой поток примет вид $\mathbf{q}=-\varkappa\nabla T$, причем

$$\varkappa=\frac{8\pi v_F p_F^2}{3T}\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)\left|\frac{\partial n_0}{\partial u}\right|du.$$

Отсюда снова видно, что $\varkappa\propto T^{-1}$.

Указанные выше упрощения интеграла столкновений оказываются достаточными для того, чтобы точно решить кинетическое уравнение (и то же самое относится к задаче о вязкости). В результате для коэффициентов $\varkappa$ и η получаются формулы, выражающие их через параметры p_F и v_F и через определенным образом усредненную по направлениям функцию w [1]).

§ 76. Поглощение звука в ферми-жидкости [2])

Напомним (см. IX, § 4), что характер распространяющихся в ферми-жидкости волн существенно зависит от величины произведения $\omega\tau$, где τ — время свободного пробега.

При $\omega\tau\ll 1$ мы имеем дело с обычными гидродинамическими звуковыми волнами. Частотную и температурную зависимости коэффициента γ их поглощения (на единице пути) можно найти по известной формуле $\gamma\sim\omega^2\eta/\rho u^3$, где η — коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, u — скорость звука (см. VI, § 77).

---

[1]) См. *Brooker G. A., Sykes J.* — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 179.

[2]) Результаты этого параграфа принадлежат *Л. Д. Ландау* (1957).

Поскольку в ферми-жидкости $\eta \propto T^{-2}$, то

$$\gamma \propto \omega^2/T^2. \tag{76,1}$$

Более формальным образом этот результат можно получить, заметив, что поглощение описывается первым по малому параметру поправочным членом в законе дисперсии звука:

$$k = \frac{\omega}{u}(1 + i\alpha\omega\tau) \tag{76,2}$$

(α — постоянная). Мнимая (при вещественной частоте) часть этого выражения и дает γ; поскольку $\tau \propto T^{-2}$, мы возвращаемся к (76,1).

При $\omega\tau \sim 1$ поглощение становится очень сильным, так что распространение звуковых волн невозможно.

При $\omega\tau \gg 1$ снова становится возможным распространение слабо затухающих волн — так называемый *нулевой звук*. Его поглощение описывается поправочным членом в законе дисперсии — на этот раз по малому параметру $1/i\omega\tau$:

$$k = \frac{\omega}{u_0}\left(1 + \frac{i\alpha}{\omega\tau}\right) \tag{76,3}$$

(u_0 — скорость распространения нулевого звука). Коэффициент этого поглощения, следовательно, пропорционален частоте столкновений: $\gamma \propto 1/\tau$. Последняя в свою очередь пропорциональна квадрату ширины области размытости распределения квазичастиц. При $\hbar\omega \ll T$ эта ширина определяется температурой, так что $1/\tau \propto T^2$ и коэффициент поглощения

$$\gamma = aT^2, \qquad T \gg \hbar\omega \gg \hbar/\tau. \tag{76,4}$$

Если же $\hbar\omega \gg T$ (но в то же время $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ как обязательное условие применимости всей теории), то распределение размыто в области шириной $\sim \hbar\omega$. В этом случае поглощение нулевого звука

$$\gamma = b\omega^2, \qquad \hbar\omega \gg T. \tag{76,5}$$

К этому случаю относится, в частности, нулевой звук всех частот при $T = 0$. Ниже будет показано, что постоянные a и b в формулах (76,4—5) связаны между собой.

Разница в характере поглощения обычного и нулевого звуков связана с различием их физической природы. В волне обычного звука в каждом малом (по сравнению с длиной волны) элементе объема распределение квазичастиц, в первом приближении, отвечает равновесию при заданных локальных температуре и скорости жидкости. В этом приближении диссипация отсутствует и поглощение звука появляется лишь при учете влияния градиентов температуры и скорости на распределение квазичастиц. В волне же нулевого звука уже сами по себе колебания вызывают неравновесность функции распределения в каждом элементе объема и учет столкновений квазичастиц приводит к поглощению звука.

Согласно основным представлениям теории нормальной ферми-жидкости, квазичастицу в ней можно рассматривать, в известном смысле, как частицу, находящуюся в самосогласованном поле окружающих частиц. В волне нулевого звука это поле периодично во времени и в пространстве. Согласно общим правилам квантовой механики, столкновение двух квазичастиц в таком поле сопровождается изменением их суммарных энергий и импульса соответственно на $\hbar\omega$ и на $\hbar\mathbf{k}$; можно сказать, что при столкновении происходит испускание или поглощение «кванта нулевого звука»[1]). Суммарный эффект таких столкновений приводит к убыванию общего числа звуковых квантов; коэффициент поглощения звука пропорционален скорости этого убывания.

При таком подходе к вопросу коэффициент поглощения нулевого звука дается выражением вида

$$\gamma=\int W\{n_1n_2(1-n_1')(1-n_2')-n_1'n_2'(1-n_1)(1-n_2)\}\times \\ \times\delta(\varepsilon_1'+\varepsilon_2'-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\hbar\omega)\,\delta(\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\hbar\mathbf{k})\times \\ \times\frac{d^3p_1d^3p_2d^3p_1'd^3p_2'}{(2\pi\hbar)^{12}}. \qquad (76,6)$$

В подынтегральном выражении выписаны в явном виде δ-функции, обеспечивающие выполнение законов сохранения энергии и импульса при столкновениях. Первый член в фигурных скобках отвечает столкновениям $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rightarrow\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'$ с поглощением кванта, а второй член — столкновениям $\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'\rightarrow\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ с испусканием кванта. Функция W, связанная с вероятностью «радиационных» столкновений, определяется свойствами волны нулевого звука; саму эту волну можно рассматривать как распространяющуюся при $T=0$ (см. IX, § 4), и тогда W не зависит от температуры[2]).

В знании функции W, однако, нет необходимости, если поставить себе целью лишь выражение коэффициента поглощения через его значение в предельном случае $\hbar\omega\ll T$. Для этого заметим, что в интеграле (76,6) существенны значения энергий квазичастиц лишь в области размытости распределения Ферми. В этой области сильно меняются в подынтегральном выражении лишь те множители, которые содержат функции $n(\varepsilon)$. Кроме

[1]) Испускание же (или поглощение) «кванта нулевого звука» одной квазичастицей невозможно, поскольку скорость нулевого звука превышает фермиевскую скорость v_F.

[2]) Подчеркнем во избежание недоразумений, что функция W не совпадает с функцией w в интеграле столкновений (74,5).

того, следует учесть, что угловые интегралы в (76,6) практически не меняются при переходе от области $\hbar\omega \ll T$ к области $\hbar\omega \gg T$. Ввиду этого будет достаточно вычислить интеграл

$$J=\int \{n_1 n_2 (1-n_1')(1-n_2') - n_1' n_2' (1-n_1)(1-n_2)\} \times \\ \times \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_1' d\varepsilon_2', \qquad (76,7)$$

взятый только по энергиям. Коэффициент же пропорциональности между γ и J зависит лишь от ω, но не от T, так что его можно будет определить по предельному значению γ при $\hbar\omega/T \ll 1$.

В интеграле (76,7) можно, конечно, пренебречь малым искажением функции распределения в волне, т. е. положить

$$n(\varepsilon) = \left[e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1\right]^{-1}.$$

Введя обозначения

$$x=\frac{\varepsilon-\mu}{T}, \quad \xi=\frac{\hbar\omega}{T},$$

получим

$$J=T^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-e^{-\xi})\,\delta(x_1'+x_2'-x_1-x_2-\xi)\, dx_1 dx_2 dx_1' dx_2'}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)\left(1+e^{-x_1'}\right)\left(1+e^{-x_2'}\right)}.$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла область интегрирования может быть распространена от $-\infty$ до ∞.

Для проведения интегрирования переходим к переменным y_1, y_2, u_1, u_2, где $y=x-x'$, $u=e^x$. Интегрирование по u_1 и u_2 производится элементарно и дает

$$T^{-3}J=(1-e^{-\xi}) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \iint\limits_{0}^{\infty} \frac{\delta(y_1+y_2+\xi)\, du_1 du_2 dy_1 dy_2}{(u_1+1)(u_2+1)(u_1+e^{y_1})(u_2+e^{y_2})} =$$

$$= (1-e^{-\xi}) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 y_2 \delta(y_1+y_2+\xi)\, dy_1 dy_2}{(1-e^{y_1})(1-e^{y_2})} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(\xi+y)\left\{\frac{1}{e^y-1}-\frac{1}{e^{y+\xi}-1}\right\} dy.$$

Для вычисления получившейся разности двух расходящихся интегралов вводим предварительно конечный нижний предел $-\Lambda$ и пишем

$$T^{-3}J = \int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y(\xi+y)\,dy}{e^y-1} - \int\limits_{-\Lambda+\xi}^{\infty} \frac{y(y-\xi)\,dy}{e^y-1} =$$

$$= 2\xi \int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} - \int\limits_{-\Lambda+\xi}^{-\Lambda} \frac{y(y-\xi)\,dy}{e^y-1}.$$

Имея в виду перейти к пределу $\Lambda \to \infty$, во втором из стоящих здесь интегралов пренебрегаем e^y в знаменателе. Первый же переписываем следующим образом:

$$\int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} = \int_{0}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} + \int_{-\Lambda}^{0} \frac{y\,dy}{e^y-1} =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \int_{-\Lambda}^{0} \left(\frac{y}{1-e^{-y}} - y \right) dy = \frac{\pi^2}{6} + \int_{0}^{\Lambda} \frac{y\,dy}{e^y-1} + \frac{\Lambda^2}{2}.$$

Произведя сокращения и переходя после этого к пределу $\Lambda \to \infty$, получим окончательно

$$J = \frac{2\pi^2 \xi T^3}{3} \left(1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2} \right).$$

Коэффициент пропорциональности между γ и J определяется, как уже указано, требованием, чтобы при $\xi \ll 1$ было $\gamma = aT^2$ из (76,4). Таким образом, находим

$$\gamma = a \left[T^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{2\pi} \right)^2 \right]. \qquad (76,8)$$

В частности, в пределе больших частот, $\hbar\omega \gg T$, отсюда получается

$$\gamma = \frac{a}{4\pi^2} (\hbar\omega)^2, \qquad (76,9)$$

чем и устанавливается связь между коэффициентами в (76,4) и (76,5).

§ 77. Кинетическое уравнение для квазичастиц в бозе-жидкости

Если длина пробега квазичастиц в сверхтекучей бозе-жидкости мала по сравнению с характерными размерами задачи, движение жидкости описывается уравнениями двухскоростной гидродинамики Ландау (см. VI, гл. XVI). Диссипативные члены в этих уравнениях содержат несколько кинетических коэффициентов (коэффициент теплопроводности и четыре коэффициента вязкости). Вычисление этих коэффициентов требует детального рассмотрения различных процессов рассеяния, многообразие которых связано с существованием двух типов квазичастиц—фононов и ротонов. В реальном жидком гелии ситуация усложняется еще и неустойчивостью начального участка фононного спектра. Эти вопросы здесь рассматриваться не будут.

Длины свободного пробега квазичастиц возрастают с понижением температуры (уже хотя бы из-за уменьшения плотности числа квазичастиц). Поэтому при достаточно низких температу-