Имея в виду перейти к пределу $\Lambda \to \infty$, во втором из стоящих здесь интегралов пренебрегаем $e^y$ в знаменателе. Первый же переписываем следующим образом:

$$\int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} = \int_{0}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} + \int_{-\Lambda}^{0} \frac{y\,dy}{e^y-1} =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \int_{-\Lambda}^{0} \left(\frac{y}{1-e^{-y}} - y\right) dy = \frac{\pi^2}{6} + \int_{0}^{\Lambda} \frac{y\,dy}{e^y-1} + \frac{\Lambda^2}{2}.$$

Произведя сокращения и переходя после этого к пределу $\Lambda \to \infty$, получим окончательно

$$J = \frac{2\pi^2 \xi T^3}{3}\left(1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2}\right).$$

Коэффициент пропорциональности между $\gamma$ и $J$ определяется, как уже указано, требованием, чтобы при $\xi \ll 1$ было $\gamma = aT^2$ из (76,4). Таким образом, находим

$$\gamma = a\left[T^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{2\pi}\right)^2\right]. \qquad (76,8)$$

В частности, в пределе больших частот, $\hbar\omega \gg T$, отсюда получается

$$\gamma = \frac{a}{4\pi^2}(\hbar\omega)^2, \qquad (76,9)$$

чем и устанавливается связь между коэффициентами в (76,4) и (76,5).

## § 77. Кинетическое уравнение для квазичастиц в бозе-жидкости

Если длина пробега квазичастиц в сверхтекучей бозе-жидкости мала по сравнению с характерными размерами задачи, движение жидкости описывается уравнениями двухскоростной гидродинамики Ландау (см. VI, гл. XVI). Диссипативные члены в этих уравнениях содержат несколько кинетических коэффициентов (коэффициент теплопроводности и четыре коэффициента вязкости). Вычисление этих коэффициентов требует детального рассмотрения различных процессов рассеяния, многообразие которых связано с существованием двух типов квазичастиц—фононов и ротонов. В реальном жидком гелии ситуация усложняется еще и неустойчивостью начального участка фононного спектра. Эти вопросы здесь рассматриваться не будут.

Длины свободного пробега квазичастиц возрастают с понижением температуры (уже хотя бы из-за уменьшения плотности числа квазичастиц). Поэтому при достаточно низких температурах легко возникает существенная неравновесность системы квазичастиц. В этих условиях уравнения двухскоростной гидродинамики неприменимы. Более того, вообще теряют смысл понятия температуры и нормальной скорости $\mathbf{v}_n$—их можно определить только по равновесному распределению квазичастиц; вместе с $\mathbf{v}_n$ теряет смысл и разделение плотности жидкости на сверхтекучую и нормальную части. Полная же плотность $\rho$ и сверхтекучая скорость $\mathbf{v}_s$ сохраняют свой смысл, являясь в этом аспекте по существу механическими переменными. Полная система уравнений, описывающих сверхтекучую жидкость, должна состоять теперь из кинетического уравнения для функции распределения квазичастиц $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, уравнения непрерывности для плотности $\rho$ и уравнения для скорости $\mathbf{v}_s$.

Кинетическое уравнение имеет обычный вид[1])

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}}-\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}=\operatorname{St} n, \tag{77,1}$$

где $\tilde{\varepsilon}$—энергия квазичастицы, зависящая как от параметра от скорости сверхтекучего движения $\mathbf{v}_s$; обозначение $\varepsilon$ сохраняем для энергии квазичастицы в покоящейся жидкости. Связь между $\varepsilon$ и $\tilde{\varepsilon}$ выясняется следующими рассуждениями.

По определению, $\varepsilon(p)$ есть закон дисперсии квазичастиц в системе отсчета $K_0$, в которой $\mathbf{v}_s=0$. Иными словами, при наличии всего одной квазичастицы энергия жидкости (отсчитываемая от энергии при $T=0$) есть $\varepsilon(p)$, а ее импульс совпадает с импульсом квазичастицы $\mathbf{p}$. Совершим галилеевское преобразование в неподвижную систему отсчета $K$, в котором сверхтекучая скорость равна $\mathbf{v}_s$. В этой системе энергия и импульс массы $M$ жидкости есть

$$E=\varepsilon(p)+\mathbf{p}\mathbf{v}_s+\frac{Mv_s^2}{2}, \quad \mathbf{P}=\mathbf{p}+M\mathbf{v}_s. \tag{77,2}$$

Отсюда видно, что в жидкости, совершающей сверхтекучее движение, энергия квазичастицы есть

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p})=\varepsilon(p)+\mathbf{p}\mathbf{v}_s \tag{77,3}$$

(ср. рассуждения при выводе условия сверхтекучести в IX, § 23).

---

[1]) Разумеется, предполагается выполненным условие квазиклассичности — медленного изменения всех величин на расстояниях порядка величины длины волны квазичастицы $\hbar/p$.

Таким образом, фигурирующие в кинетическом уравнении производные[1])

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s,$$
$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{p}\mathbf{v}_s) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\nabla\rho + (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{v}_s. \tag{77,4}$$

Во втором равенстве учтено, что энергия $\varepsilon$ может зависеть от координат за счет переменной плотности $\rho$, от которой $\varepsilon$ зависит как от параметра. Учтено также (при преобразовании производной от $\mathbf{p}\mathbf{v}_s$), что сверхтекучее движение всегда потенциально,

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0. \tag{77,5}$$

Уравнение непрерывности для плотности есть

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0, \tag{77,6}$$

где $\mathbf{i}$, по определению, есть импульс единицы объема жидкости. Выражение для $\mathbf{i}$ можно найти прямо из второй формулы (77,2), просуммировав ее по всем квазичастицам в этом объеме:

$$\mathbf{i} = \rho\mathbf{v}_s + \langle\mathbf{p}\rangle. \tag{77,7}$$

Здесь и ниже в этом параграфе угловые скобки означают интегрирование по импульсному распределению:

$$\langle\ldots\rangle = \int \ldots n\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Остается найти уравнение для сверхтекучей скорости. Для этого исходим из закона сохранения импульса, выражаемого уравнением

$$\frac{\partial i_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{77,8}$$

где $\mathbf{i}$ дается формулой (77,7), а $\Pi_{\alpha\beta}$ — тензор потока импульса.

Пусть $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}$ — значение этого тензора в системе отсчета $K_0$. Совершив преобразование к системе $K$, получим[2])

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \rho v_{s\alpha}v_{s\beta} + v_{s\alpha}i^{(0)}_\beta + v_{s\beta}i^{(0)}_\alpha =$$
$$= \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \rho v_{s\alpha}v_{s\beta} + v_{s\alpha}\langle p_\beta\rangle + v_{s\beta}\langle p_\alpha\rangle \tag{77,9}$$

---

[1]) Строго говоря, формула (77,2) выведена для однородного сверхтекучего потока, $\mathbf{v}_s = \text{const}$. В неоднородном потоке в энергии могли бы появиться еще и члены, содержащие пространственные производные от $\mathbf{v}_s$. В предположении медленности изменения $\mathbf{v}_s$, однако, эти члены привели бы в кинетическом уравнении к поправкам высших порядков малости.

[2]) Формулу галилеевского преобразования для $\Pi_{\alpha\beta}$ легко найти, рассмотрев классическую систему частиц, для которой $\Pi_{\alpha\beta} = \sum p_\alpha v_\beta = \sum m v_\alpha v_\beta$, где суммирование производится по всем частицам в единице объема.

($\mathbf{i}^{(0)} = \langle\mathbf{p}\rangle$ — импульс единицы объема жидкости в системе $K_0$). Этим определяется зависимость тензора $\Pi_{\alpha\beta}$ от скорости $\mathbf{v}_s$.

Для дальнейшего преобразования уравнения (77,8) вернемся к кинетическому уравнению (77,1), умножим его на $p_\alpha$ и проинтегрируем по $d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Ввиду сохранения суммарного импульса квазичастиц при столкновениях, правая сторона уравнения обратится в нуль. Интеграл же в левой стороне уравнения преобразуем точно так, как это делалось в § 74 (при выводе (74,10)), и находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p_\alpha\rangle+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\langle p_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_\beta}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right\rangle=0. \tag{77,10}$$

Подставим теперь в (77,8) выражения (77,7) и (77,9) для $\mathbf{i}$ и $\Pi_{\alpha\beta}$ и затем исключим $\partial\rho/\partial t$ и $\partial\langle\mathbf{p}\rangle/\partial t$ с помощью (77,6) и (77,10). В результате получим

$$\frac{\partial v_{s\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{v_s^2}{2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{\rho}\left\langle\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\rangle\frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\langle p_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_\beta}\right\rangle=0.$$

Из условия $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s=0$ (учтенного уже и во втором члене) следует, что сумма трех последних членов должна быть градиентом некоторой функции. Кроме того, тензор $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$ в отсутствие квазичастиц должен быть равен $P_0\delta_{\alpha\beta}$, где $P_0(\rho)$ — давление жидкости при $T=0$. Из этих требований однозначно следует вид тензора $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}=\left\langle p_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_\beta}\right\rangle+\delta_{\alpha\beta}\left[P_0+\rho\left\langle\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\rangle\right]. \tag{77,11}$$

Уравнение для $\mathbf{v}_s$ принимает теперь вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t}+\nabla\left[\frac{v_s^2}{2}+\frac{\mu_0}{m}+\left\langle\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\rangle\right]=0, \tag{77,12}$$

где $\mu_0$ — химический потенциал жидкости (при $T=0$), связанный с давлением $P_0$ термодинамическим соотношением $d\mu_0=m\,dP_0/\rho$ ($m$ — масса частицы жидкости, $m/\rho$ — молекулярный объем).

Уравнения (77,1), (77,6), (77,12) составляют полную систему уравнений, описывающих сверхтекучую жидкость в неравновесном состоянии (*И. М. Халатников*, 1952).

Остановимся еще, для полноты, на законе сохранения энергии. Он выражается уравнением вида

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{q}=0, \tag{77,13}$$

где $\mathbf{q}$ — плотность потока энергии жидкости. Согласно (77,2),

$$E=E(\rho)+\langle\varepsilon\rangle+\mathbf{v}_s\langle\mathbf{p}\rangle+\frac{\rho v_s^2}{2}, \tag{77,14}$$

где $E_0(\rho)$—энергия при $T=0$, связанная с химическим потенциалом соотношением $dE_0=\rho\, d\mu_0/m$. Дифференцируя выражение (77,14) по времени и используя известные уже уравнения для всех величин, можно найти плотность потока энергии. Опустив вычисления, приведем окончательный результат

$$\mathbf{q}=(\langle\mathbf{p}\rangle+\rho\mathbf{v}_s)\left[\frac{\mu_0}{m}+\left\langle\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\rangle+\frac{v_s^2}{2}\right]+\left\langle(\varepsilon+\mathbf{p}\mathbf{v}_s)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}+\mathbf{v}_s\right)\right\rangle. \quad (77,15)$$

Равновесная функция распределения квазичастиц в системе отсчета, в которой «газ квазичастиц» как целое покоится (т. е. нормальная скорость $\mathbf{v}_n=0$), есть обычное распределение Бозе с энергией квазичастицы $\tilde{\varepsilon}$, даваемой выражением (77,3). Распределение же в системе отсчета, в которой нормальная скорость отлична от нуля, получается заменой $\tilde{\varepsilon}$ на $\tilde{\varepsilon}-\mathbf{p}\mathbf{v}_n$. Таким образом, равновесное распределение квазичастиц при наличии обоих движений есть

$$n(\mathbf{p})=\left[\exp\frac{\varepsilon+(\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n)\mathbf{p}}{T}-1\right]^{-1}. \quad (77,16)$$

Путем усреднения полученных выше уравнений по этому распределению можно получить систему уравнений двухскоростной гидродинамики (в этом приближении—без диссипативных членов); мы на этом здесь останавливаться не будем.

### Задача

Определить коэффициент поглощения звука в бозе-жидкости при частотах $\omega\gg\nu$, где $\nu$—частота столкновений квазичастиц. Температура предполагается настолько низкой, что практически все квазичастицы являются фононами (*А. Ф. Андреев, И. М. Халатников*, 1963).

Решение. В рассматриваемых условиях можно пренебречь интегралом столкновений в уравнении (77,1). Положим $\rho=\rho_0+\delta\rho$, $n=n_0+\delta n$ (где $\delta\rho$, $\delta n$—малые поправки к равновесным плотности жидкости и функции распределения фононов) и линеаризуем уравнения (77,1), (77,6) и (77,12) по малым величинам $\delta\rho$, $\delta n$, $\mathbf{v}_s$. Предполагая все эти величины пропорциональными $\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\mathbf{r})$, получим уравнения

$$(\mathbf{k}\mathbf{v}-\omega)\,\delta n=\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\,\mathbf{v}\mathbf{k}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,\delta\rho+\mathbf{p}\mathbf{v}_s\right), \quad (1)$$

$$\omega\delta\rho-\mathbf{k}\mathbf{v}_s\rho=\int\mathbf{k}\mathbf{p}\,\delta n\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2)$$

$$\omega\mathbf{v}_s-\mathbf{k}u_0^2\frac{\delta\rho}{\rho}=\mathbf{k}\int\left\{n\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\,\delta\rho+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,\delta n\right\}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3)$$

Здесь использованы термодинамические соотношения

$$d\frac{\mu_0}{m}=\frac{dP_0}{\rho}=\frac{u_0^2}{\rho}\,d\rho,$$

где $u_0$ — скорость звука при $T=0$; индекс 0 у $\rho$ и $n$ здесь и ниже опускаем.

Ввиду малого числа фононов при температурах вблизи нуля, выражения в правых сторонах уравнений (1—3) представляют собой малые поправки. Опустив их вовсе, получим из уравнений (2) и (3)

$$\omega = u_0 k, \quad \mathbf{v}_s = u_0 \frac{\delta\rho}{\rho} \frac{\mathbf{k}}{k}. \tag{4}$$

В следующем приближении подставляем (4) в правую сторону уравнения (1) и находим

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{v\cos\theta}{v\cos\theta - \omega/k} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{p u_0}{\rho}\cos\theta \right) \delta\rho \tag{5}$$

($\theta$ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$). Закон дисперсии фононов пишем в виде

$$\varepsilon(p) = u_0 p(1+\alpha p^2), \quad v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = u_0(1+3\alpha p^2)$$

с учетом следующего, после линейного, члена разложения (для жидкого гелия при обычных давлениях $\alpha > 0$, что означает неустойчивость фононов по отношению к самопроизвольному распаду).

Наличие в (5) «резонансного» знаменателя приводит (см. ниже) к появлению при интегрировании большого логарифмического множителя. Ограничившись «логарифмической» точностью, пренебрегаем в правой стороне уравнения (3) членом с $\delta\rho$, не содержащим такого знаменателя. Исключив затем $\mathbf{v}_s$ из уравнений (2) и (3), получим окончательно следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2 = A \frac{u_0^2}{\rho} \int \frac{p^2}{\cos\theta - 1 + 3\alpha p^2 - i0} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{6}$$

где

$$A = \left(1 + \frac{\rho}{u_0}\frac{du_0}{d\rho}\right)^2.$$

Мнимая часть интеграла по $\cos\theta$ определяется обходом полюса (полюс находится в области интегрирования, если $\alpha > 0$). Вещественную же часть вычисляем с логарифмической точностью, обрезая интегрирование снизу при $1-\cos\theta \sim \alpha p^2 \sim \alpha T^2/u_0^2$, а сверху — при $1-\cos\theta \sim 1$. Левую сторону уравнения (6) пишем в виде

$$2u_0 \left( \delta u - \frac{u_0}{\omega}\gamma \right),$$

где $\gamma$ — коэффициент поглощения, а $\delta u$ — поправка к скорости звука ($u = u_0 + \delta u$). Вычисление интеграла приводит к результату

$$\delta u = \frac{3\rho_n u_0 A}{4\rho} \ln \frac{u_0^2}{\alpha T^2}, \quad \gamma = \frac{3\pi\omega\rho_n A}{4\rho}, \tag{7}$$

где $\rho_n = 2\pi^2 T^4/45\hbar^3 u_0^5$ — фононная часть нормальной плотности жидкости. Частотная и температурная зависимости $\gamma$ совпадают, естественно, с найденными в § 73.