

Для грубой количественной оценки остаточного сопротивления можно воспользоваться элементарной формулой (43,7), положив в ней (для электронов в металле) $\rho \sim \rho_F$:

$$\sigma \sim e^2 N l / \rho_F, \quad (78,16)$$

где N — плотность электронов. При рассеянии на примесях длина свободного пробега $l \sim 1/N_{\text{пр}} \sigma_t$, где σ_t — транспортное сечение рассеяния. Поэтому остаточное сопротивление $\rho_{\text{ост}} = 1/\sigma$,

$$\rho_{\text{ост}} \sim \frac{N_{\text{пр}} \sigma_t \rho_F}{e^2 N}. \quad (78,17)$$

К сказанному в этом параграфе надо сделать еще следующее замечание. Общее условие применимости кинетического уравнения для ферми-жидкости требует, чтобы квантовая неопределенность энергии электрона была мала по сравнению с шириной ($\sim T$) зоны тепловой размытости распределения Ферми. Указанная неопределенность $\sim \hbar/\tau$, где $\tau \sim l/v_F$ — время свободного пробега. Для рассеяния на примесях $l \sim 1/N_{\text{пр}} \sigma_t$, неопределенность \hbar/τ не зависит от температуры и тем самым размывает ферми-границу даже при $T = 0$. На первый взгляд отсюда следует, что все проведенное выше рассмотрение ограничено очень жестким условием

$$T \gg \hbar v_F \sigma_t N_{\text{пр}}, \quad (78,18)$$

зависящим от концентрации примесей. В действительности, однако, такое ограничение отсутствует (*Л. Д. Ландау, 1934*).

Дело в том, что ввиду закрепленности положений примесных атомов и упругости рассеяния электронов на них, вся задача о вычислении электрического тока может быть сформулирована в принципе как квантовомеханическая задача о движении электрона в некотором заданном сложном, но потенциальном внешнем поле. Для состояний электрона, определенных как стационарные состояния в этом поле, энергия не имеет неопределенности; при $T = 0$ электроны будут заполнять область состояний, ограниченную резкой ферми-поверхностью — но не в импульсном пространстве, а в пространстве квантовых чисел движения в этом поле. В такой постановке задачи условия типа (78,18) вообще не возникают.

§ 79. Электрон-фононное взаимодействие

В достаточно чистых металлах основным механизмом установления равновесия в широком диапазоне температур является взаимодействие электронов проводимости с фононами.

Условие возможности испускания (или поглощения) фонона электроном требует, чтобы скорость электрона превосходила ско-

рость фонона — ср. аналогичный вывод в § 68 для испускания фонона фононом. Но скорость электронов у ферми-поверхности обычно велика по сравнению со скоростью фононов, так что это условие выполнено и основной вклад в электрон-фононный интеграл столкновений вносят именно указанные «однофононные» процессы.

С учетом этих процессов интеграл столкновений имеет следующий вид, аналогичный фонон-фононному интегралу (67,6)¹⁾:

$$\begin{aligned} St_{e,ph}n_p = & \int \omega(\mathbf{p}', \mathbf{k}; \mathbf{p}) \{n_{p'}(1-n_p)N_k - n_p(1-n_{p'})(1+N_k)\} \times \\ & \times \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \omega_k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \\ & + \int \omega(\mathbf{p}'; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \{n_{p'}(1-n_p)(1+N_k) - n_p(1-n_{p'})N_k\} \times \\ & \times \delta(\varepsilon_p + \omega_k - \varepsilon_{p'}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (79,1) \end{aligned}$$

Первый член отвечает процессам испускания фонона с квазиимпульсом \mathbf{k} электроном с заданным квазиимпульсом \mathbf{p} и обратным процессам поглощения фонона \mathbf{k} электронами \mathbf{p}' с восстановлением квазиимпульса \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{b}; \quad (79,2a)$$

в этих процессах переходы осуществляются между электронным состоянием с заданной энергией ε_p и нижележащими (по энергии) состояниями. Второй же член отвечает процессам поглощения фонона электроном \mathbf{p} и обратным процессам его испускания электронами \mathbf{p}' :

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{b}; \quad (79,2b)$$

в этих процессах переходы осуществляются между заданным и вышележащими электронными состояниями. По тем же причинам, что и для испускания фонона фононом в § 66, значение \mathbf{b} в равенствах (79,2) однозначно определяется заданием значений \mathbf{k} , \mathbf{p} и требованием, чтобы \mathbf{p}' оказалось в той же выбранной ячейке обратной решетки. δ -функционные множители в (79,1) выражают закон сохранения энергии; ε_p — энергии электронов, ω_k — энергии фононов. Как и в главе VII, функция распределения (числа заполнения состояний) фононов обозначена через N_k ; функция же распределения электронов обозначается посредством n_p . Индексы, указывающие ветвь фононного спектра (и знаки суммирования по ним), мы для краткости не выписываем. Предполагается, что вероятности переходов не зависят от спина электрона, не меняющегося при переходе.

¹⁾ В §§ 79—83 используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

Аналогичным образом записывается фонон-электронный интеграл столкновений, который должен быть добавлен к фонон-фононному интегралу в правой части кинетического уравнения для функции распределения фононов:

$$St_{ph,e}N_k = \int w(p; p', k) \{n_p(1-n_{p'}) (1+N_k) - n_{p'}(1-n_p) N_k\} \times \\ \times \delta(\epsilon_{p'} + \omega_k - \epsilon_p) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (79,3)$$

причем $p = p' + k + b$. Этот интеграл — разность между числом фононов k , испускаемых электронами со всеми возможными квазиимпульсами p , и числом фононов, поглощаемых электронами со всеми возможными p' . Множитель 2 учитывает два возможных направления спина излучающего (или поглощающего) электрона.

В первом порядке теории возмущений фигурирующие в этих интегралах вероятности испускания и поглощения фонона электроном определяются оператором электрон-фононного взаимодействия, линейным по фононным операторам $\hat{U}_s(p)$ (66,2); линейность отвечает тому, что эти операторы ответственны за переходы с изменением на 1 всего одного из чисел заполнения фононных состояний. Не повторяя вновь изложенных в § 66 рассуждений, укажем, что в пределе стремящегося к нулю квазиимпульса фонона k вероятность испускания (или поглощения) фонона пропорциональна первой степени k :

$$w \propto k. \quad (79,4)$$

Согласно общему свойству вероятностей перехода в борновском приближении, вероятности прямого и обратного переходов одинаковы; поэтому ¹⁾

$$w(p', k; p) = w(p; p', k). \quad (79,5)$$

Это свойство уже учтено в интегралах (79,1) и (79,3).

Дальнейшее упрощение достигается при учете симметрии (выраженной вещественностью операторов \hat{U}_s), с которой операторы рождения и уничтожения фононов входят в оператор электрон-фононного взаимодействия. В силу этой симметрии, испускание фонона с квазиимпульсом k эквивалентно поглощению фонона с квазиимпульсом $-k$. Учтем также близость энергий электрона ϵ_p и $\epsilon_{p'}$ к фермиевской энергии ϵ_F . Пусть p_F и p'_F — векторы, проведенные в направлениях p и p' и оканчивающиеся на ферми-поверхности. Пусть функции w выражены в зависимости от направлений p_F , p'_F и разностей $\eta_p = \epsilon_p - \epsilon_F$, $\eta_{p'} = \epsilon_{p'} - \epsilon_F$, характеризующих степень близости энергии электрона к ϵ_F . Относительно

¹⁾ Напомним, что квантовые числа начального (i) и конечного (f) состояний в обозначениях вероятностей перечисляются везде в порядке fi .

последних переменных ω является медленной функцией, заметно меняющейся лишь на интервалах $\sim \varepsilon_F \gg T$. Пренебрегая величинами $\sim \eta \sim T$, можно положить в этих функциях $\eta_p = \eta_{p'} = 0$. Тогда указанная выше эквивалентность выразится равенством

$$\omega(p'_F, k; p_F) = \omega(p'_F; p_F, -k), \quad (79,6)$$

причем ω являются функциями только от направлений p_F и p'_F . Если теперь переобозначить во втором члене в (79,1) переменную интегрирования $k \rightarrow -k$, то коэффициенты ω в обоих интегралах станут одинаковыми; поскольку $\omega_{-k} = \omega_k$, то переобозначение приводит лишь к замене N_k на N_{-k} .

Интегралы (79,1) и (79,3) обращаются, конечно, в нуль равновесными функциями распределения электронов и фононов. Линеаризация этих интегралов при малых отклонениях от равновесия производится одновременно по обеим функциям распределения, которые представляем в виде

$$\begin{aligned} n &= n_0(\varepsilon) + \delta \tilde{n}, & N &= N_0(\omega) + \delta N, \\ \delta \tilde{n} &= -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varphi = \frac{n_0(1-n_0)}{T} \varphi, & & (79,7) \\ \delta N &= -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} \chi = \frac{N_0(1+N_0)}{T} \chi. \end{aligned}$$

Преобразование производится вполне аналогично тому, как это делалось в § 67 и § 74. Так, выражение в фигурных скобках в первом члене в (79,1), переписанное как

$$(1-n)(1-n')(1+N) \left[\frac{n'}{1-n'} \frac{N}{1+N} - \frac{n}{1-n} \right],$$

приводится к виду

$$n_0(1-n'_0)(1+N_0) \frac{1}{T} (\varphi' - \varphi + \chi).$$

Это выражение целесообразно преобразовать дальше, воспользовавшись равенством

$$n_0(\varepsilon)[1-n_0(\varepsilon')] = [n_0(\varepsilon) - n_0(\varepsilon')] N_0(\varepsilon - \varepsilon'), \quad (79,8)$$

которое легко проверить прямым вычислением. Тогда получим

$$(n_0 - n'_0) \frac{N_0(1+N_0)}{T} (\varphi' - \varphi + \chi) = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} (n_0 - n'_0) (\varphi' - \varphi + \chi).$$

Таким же образом преобразуются остальные члены, и в результате получим следующие линеаризованные интегралы

столкновений:

$$\begin{aligned} \text{St}_{e,ph}n &= I_{e,ph}(\varphi, \chi) = \\ &= - \int \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \omega (n'_0 - n_0) \{ (\varphi_{p'} - \varphi_p + \chi_k) \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \omega_k) - \\ &\quad - (\varphi_{p'} - \varphi_p - \chi_{-k}) \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} + \omega_k) \} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (79,9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{St}_{ph,e}N &= I_{ph,e}(\chi, \varphi) = \\ &= \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \int \omega (n'_0 - n_0) (\varphi_{p'} - \varphi_p + \chi_k) \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \omega_k) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (79,10) \end{aligned}$$

причем в обоих $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{b}$.

Эти интегралы естественным образом разбиваются на две части — линейные интегральные операторы, действующие соответственно на функции φ и χ . Так,

$$I_{e,ph}(\varphi, \chi) = I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph}^{(2)}(\chi). \quad (79,11)$$

Отметим важное свойство оператора $I_{e,ph}^{(1)}$: он не меняет четности функции $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ по переменной η , т. е. оставляет четную функцию четной и нечетную — нечетной. Действительно, в смысле своего воздействия на функцию от η оператор $I_{e,ph}^{(1)}$ имеет вид

$$I_{e,ph}^{(1)}(\varphi(\eta)) \sim \int K(\eta, \eta') [\varphi(\eta') - \varphi(\eta)] d\eta,$$

где

$$K(\eta, \eta') = [n_0(\eta') - n_0(\eta)] [\delta(\eta - \eta' - \omega) - \delta(\eta' - \eta - \omega)].$$

Заметив, что

$$n_0(\eta) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{th} \frac{\eta}{2T} \right] \quad (79,12)$$

и поэтому

$$n_0(\eta') - n_0(\eta) = \frac{1}{2} \left[\text{th} \frac{\eta}{2T} - \text{th} \frac{\eta'}{2T} \right],$$

мы видим, что

$$K(\eta, \eta') = K(-\eta, -\eta'),$$

откуда непосредственно следует указанное выше свойство оператора. Это свойство будет использовано в §§ 80, 82.

Интегралы столкновений (79,9—10) обращаются тождественно в нуль функциями

$$\varphi = \text{const} \cdot \varepsilon, \quad \chi = \text{const} \cdot \omega \quad (79,13)$$

(с одинаковыми коэффициентами const). Это «паразитное» решение кинетического уравнения соответствует (как и решение (67,18)

в фонон-фононном уравнении) изменению температуры системы на малую постоянную величину. Но интегралы (79,9—10) обращаются в нуль также и постоянной

$$\varphi = \text{const} \quad (79,14)$$

при $\chi=0$. Это решение связано с постоянством полного числа электронов (в отличие от полного числа фононов); с формальной точки зрения оно отвечает изменению химического потенциала электронов на малую постоянную величину.

Для дальнейших количественных оценок напомним, что порядки величины параметров электронного спектра в металле выражаются лишь через постоянную решетки d и эффективную массу электрона m^* ; так, фермиевский импульс (обычные единицы) $p_F \sim \hbar/d$, скорость $v_F \sim p_F/m^* \sim \hbar/m^*d$, энергия $\varepsilon_F \sim v_F p_F \sim \hbar^2/m^*d^2$. Параметры фононного спектра и электрон-фононного взаимодействия содержат еще и массу атомов M . Плотность вещества $\rho \sim M$, а скорость звука $u \sim \rho^{-1/2} \sim M^{-1/2}$; дополнив до нужной размерности с помощью величин \hbar , d , m^* (что можно сделать лишь одним способом), получим оценку

$$u \sim v_F (m^*/M)^{1/2}. \quad (79,15)$$

Отсюда дебаевская температура

$$\Theta \sim \hbar \omega_{\max} \sim \hbar u/d \sim \varepsilon_F (m^*/M)^{1/2}. \quad (79,16)$$

В оператор же электрон-фононного взаимодействия масса M входит только через операторы смещения атомов \hat{U}_s (66,2); никакой другой малости по $1/M$ это взаимодействие не содержит—его энергия становится $\sim \varepsilon_F$, когда $U_s \sim d$. Матричные элементы операторов \hat{U}_s , а с ними и матричные элементы оператора электрон-фононного взаимодействия, $\propto (M\omega)^{-1/2} \propto M^{-1/4}$ (при заданном квазиимпульсе k частота $\omega \sim uk \propto M^{-1/2}$). Вероятность же рассеяния определяется квадратом матричного элемента. Поэтому функция w в интеграле столкновений пропорциональна $M^{-1/2}$, или, дополнив до требуемой размерности,

$$w \sim \Theta v_F d^2. \quad (79,17)$$

Эту оценку надо изменить в случае, если речь идет об испускании или поглощении длинноволнового акустического фонона. Тот факт, что в таком случае w пропорциональна k , означает, что в оценку надо ввести дополнительный множитель $k/k_{\max} \sim kd$:

$$w \sim \Theta v_F k d^3. \quad (79,18)$$