§ 80. Кинетические коэффициенты металла. Высокие температуры

При высоких температурах, $T \gg \Theta$, в кристалле возбуждены фононы со всеми возможными квазиимпульсами, вплоть до максимальных, совпадающих по порядку величины с фермиевским импульсом электронов: $k_{\max} \sim p_F \sim 1/d$. По самому определению дебаевской температуры, максимальная энергия фононов $\omega_{\max} \sim \Theta$ и, таким образом, для всех вообще фононов $\omega \ll T$.

Таким образом, в рассматриваемых условиях энергии фононов малы по сравнению с шириной области размытости фермиевского распределения электронов. Это позволяет приближенно рассматривать испускание или поглощение фонона как упругое рассеяние электрона. Углы же рассеяния отнюдь не малы, поскольку квазиимпульсы электронов и фононов в рассматриваемых условиях одинакового порядка величины.

При высоких температурах, когда числа заполнения фононных состояний велики, установление равновесия в каждом элементе объема фононного газа (фонон-фононная релаксация) происходит очень быстро. По этой причине при рассмотрении электро- и теплопроводности металла можно считать фононную функцию распределения равновесной, т. е. положить в интегралах столкновений $\chi = 0$ (к количественной оценке χ мы вернемся еще в конце параграфа). Другими словами, достаточно рассматривать кинетическое уравнение лишь для электронов.

Сразу же отметим, что в приближении, предполагающем упругость рассеяния электронов, остаются в силе полученные в § 78 результаты, основанные лишь на этом предположении. В том числе остается справедливым закон Видемана—Франца (78,13), определяющий отношение $\sigma/\varkappa$. Для определения же температурной зависимости каждого из коэффициентов σ и $\varkappa$ по отдельности надо более детально рассмотреть электрон-фононный интеграл столкновений (79,9).

В рассматриваемых условиях этот интеграл сильно упрощается. Ввиду малости энергии фонона $\omega = \pm(\varepsilon' - \varepsilon)$, можно разложить разность $n_0' - n_0$ по ее степеням[1]):

$$n_0' - n_0 \approx \pm\, \omega \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

После этого в аргументах δ-функций можно уже положить $\omega = 0$; тогда

$$I_{e,\,ph}(\varphi) = 2\int w \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\, \delta(\varepsilon' - \varepsilon)\, (\varphi' - \varphi)\, \omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

[1]) Учет ω в этой разности не противоречит принятому приближению — упругости рассеяния электронов. Он понадобился ввиду того, что при приведении интеграла столкновений к виду (79,9) было использовано равенство (79,8), правая часть которого становится при $\varepsilon = \varepsilon'$ неопределенной.

При $\omega \ll T$ функция распределения фононов $N_0 \approx T/\omega$, так что $\partial N_0/\partial\omega \approx -T/\omega^2$. Производная же $\partial n_0/\partial\varepsilon \sim -1/T$. Интеграл определяется областью значений $k \sim k_{\max}$, в которой $\omega \sim \Theta$. С учетом δ-функций интегрирование по d^3k вносит в оценку интеграла множитель $k_{\max}^2/v_F$:

$$I_{e,\,ph}(\varphi) \sim -w\frac{T}{\Theta}\frac{k_{\max}^2}{v_F}\frac{\varphi}{T}.$$

Используя оценку (79,17), находим отсюда

$$I_{e,\,ph}(\varphi) \sim -\varphi \sim -T\delta\tilde{n}. \tag{80,1}$$

Это значит, что частота электрон-фононных столкновений $\nu_{e,\,ph} \sim T$ ($T/\hbar$ в обычных единицах), длина пробега $l \sim v_F/T$ и из (78,16) находим для электропроводности (обычные единицы)[1]:

$$\sigma \sim \frac{Ne^2\hbar}{m^*T}. \tag{80,2}$$

Таким образом, электропроводность металла при $T \gg \Theta$ обратно пропорциональна температуре. Из закона Видемана — Франца следует тогда, что коэффициент теплопроводности постоянен:

$$\varkappa \sim \frac{N\hbar}{m^*}. \tag{80,3}$$

Оценим теперь поправочные функции φ и χ в распределениях электронов и фононов с целью оправдания пренебрежения χ в интеграле столкновений. Сделаем это, например, для случая наличия электрического поля при равном нулю градиенте температуры.

Поскольку электрическое поле не влияет на движение фононов, левая сторона кинетического уравнения для фононов равна нулю. Уравнение сводится поэтому к равенству нулю суммы интегралов столкновения фононов с электронами и друг с другом:

$$I^{(1)}_{ph,\,e}(\varphi) + I^{(2)}_{ph,\,e}(\chi) + I_{ph,\,ph}(\chi) = 0 \tag{80,4}$$

(индексы (1) и (2) отличают две части интеграла (79,10) подобно тому, как это сделано в (79,11)).

---

[1]) Заметим, что квантовая неопределенность энергии электронов, $\sim\hbar\nu_{e,\,ph} \sim T$, оказывается порядка величины ширины области размытия их распределения. Это обстоятельство, однако, не нарушает применимости полученных результатов по причине, аналогичной той, которая была объяснена в конце § 78 в связи с рассеянием на примесях. Ввиду относительной медленности колебаний атомов в решетке и упругости рассеяния электронов, задача может быть в принципе сформулирована как задача о движении электронов в заданном потенциальном поле деформированной решетки.

Интеграл $I_{ph,e}$ оценивается подобно тому, как это сделано выше для интеграла $I_{e,ph}$. При этом, однако, надо учесть, что интегрирование по квазиимпульсам электрона **p** производится фактически лишь вблизи ферми-поверхности по объему слоя толщины $\sim T/v_F$ и площадью $\sim p_F^2$. Наличие δ-функции вносит в оценку интеграла еще множитель $1/\varepsilon_F$. В результате получим

$$I^{(2)}_{ph,e}(\chi)\sim-\omega\frac{\chi}{T}\frac{T}{\Theta}\frac{Tp_F^2}{v_F\varepsilon_F}\sim-\chi\frac{T}{\varepsilon_F},\quad I^{(1)}_{ph,e}(\varphi)\sim-\varphi\frac{T}{\varepsilon_F}. \tag{80,5}$$

Интеграл же фонон-фононных столкновений оценивается как

$$I_{ph,ph}(\chi)\sim-\nu_{ph,ph}\,\delta N\sim-\nu_{ph,ph}\frac{T}{\Theta^2}\chi$$

с эффективной частотой столкновений из (68,3):

$$\nu_{ph,ph}\sim\frac{T}{Mud}\sim T\sqrt{\frac{m^*}{M}}.$$

Таким образом,

$$I_{ph,ph}(\chi)\sim-\frac{T^2}{\Theta^2}\sqrt{\frac{m^*}{M}}\chi\sim-\frac{T^2}{\Theta\varepsilon_F}\chi. \tag{80,6}$$

Сравнив (80,5) и (80,6), мы видим, прежде всего, что

$$I^{(2)}_{ph,e}(\chi)/I_{ph,ph}(\chi)\sim\Theta/T\ll 1$$

— эффективная частота фонон-электронных столкновений (при равновесных электронах, т. е. при $\varphi=0$) мала по сравнению с частотой фонон-фононных столкновений. По этой причине в уравнении (80,4) можно пренебречь вторым членом. Сравнение же двух оставшихся членов приводит к результату

$$\chi/\varphi\sim\Theta/T\ll 1, \tag{80,7}$$

чем и оправдывается пренебрежение функцией χ в электрон-фононном интеграле столкновений. Тот же результат (80,7) получается, как легко убедиться, и при наличии градиента температуры.

Пренебрежение функцией χ в кинетическом уравнении электронов может, однако, оказаться недопустимым при рассмотрении термоэлектрических явлений.

Согласно формуле (78,12) (вывод которой основан только на предположении об упругости рассеяния электронов), термоэлектрический коэффициент

$$\alpha^{\mathrm{I}}\sim T/e\varepsilon_F \tag{80,8}$$

(смысл индекса I указан ниже). Эта величина «аномально» мала в том смысле, что порядок величины интеграла в (78,8) (второй член в формуле) оказался уменьшенным в отношении T/ε_F из-за нечетности функции

$$\varphi^{\mathrm{I}} = -\frac{\eta}{T}\,\mathbf{l}\nabla T \tag{80,9}$$

по переменной $\eta = \varepsilon - \mu$. Это обстоятельство в известном смысле «случайно»; благодаря нему может оказаться, что сравнительно малая добавка к φ, связанная с неравновесностью фононов, приведет к сравнимому с (80,8) вкладу в α.

Будем искать решение кинетического уравнения электронов

$$\frac{\partial n_0}{\partial T}\mathbf{v}\nabla T = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{\eta}{T}\mathbf{v}\nabla T = I^{(1)}_{e,\,ph}(\varphi) + I^{(2)}_{e,\,ph}(\chi) \tag{80,10}$$

в виде суммы $\varphi = \varphi^{\mathrm{I}} + \varphi^{\mathrm{II}}$, где φ^{I} — решение уравнения без второго члена в правой стороне, а φ^{II} — решение уравнения

$$I^{(1)}_{e,\,ph}(\varphi) + I^{(2)}_{e,\,ph}(\chi) = 0. \tag{80,11}$$

φ^{I} является «большой» частью функции φ; ввиду отмеченной в § 79 четности оператора $I^{(1)}_{e,\,ph}$ по переменной η, эта часть имеет вид (80,9) и нечетна по переменной η. Из уравнения же (80,11) следует, что $\varphi^{\mathrm{II}} \sim \chi$ и потому

$$\varphi^{\mathrm{II}}/\varphi^{\mathrm{I}} \sim \chi/\varphi^{\mathrm{I}} \sim \Theta/T \ll 1.$$

Но в отличие от φ^{I}, функция φ^{II} вовсе не обращается в нуль при $\varepsilon = \mu$. Поэтому при вычислении соответствующего вклада в плотность тока не происходит погашения члена основного порядка и результат мал только в смысле относительной малости φ^{II}. Это значит, что вклад последней в термоэлектрический коэффициент

$$\alpha^{\mathrm{II}} \sim \alpha^{\mathrm{I}}\frac{\varepsilon_F}{T}\frac{\Theta}{T} \sim \frac{\Theta}{eT}. \tag{80,12}$$

На нижней границе рассматриваемой температурной области, при $T \sim \Theta$, имеем $e\alpha^{\mathrm{II}} \sim 1$ вместо малой величины $e\alpha^{\mathrm{I}} \sim \Theta/\varepsilon_F$.

Таким образом, термоэлектрический коэффициент складывается из двух аддитивных частей. Эти части могут быть одинакового порядка величины, но имеют различную температурную зависимость. Физическое происхождение второго слагаемого в α состоит в том, что при теплопередаче в кристалле возникает поток фононов («фононный ветер»), который увлекает за собой электроны [1].

---

[1] Выяснение роли увлечения электронов фононами в кинетических явлениях в металлах принадлежит *Л. Э. Гуревичу* (1946).