§ 84. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Общая теория

Характерным безразмерным параметром, определяющим влияние магнитного поля на электропроводность металла, является отношение r_B/l, где r_B — ларморовский радиус орбиты электрона, а l — длина свободного пробега.

Напомним (см. IX, § 57), что движение электронов проводимости в магнитном поле практически всегда квазиклассично в связи с очень малой величиной отношения $\hbar\omega_B/\varepsilon_F$ (где ω_B — ларморовская частота). Траекторией в импульсном пространстве является при этом контур сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathrm{const}$ плоскостью $p_z = \mathrm{const}$, причем ось z направлена вдоль поля. Поскольку энергии электронов близки к граничной энергии ε_F, то и изоэнергетические поверхности, о которых может здесь идти речь, близки к ферми-поверхности. Поэтому размеры траектории в импульсном пространстве совпадают с линейными размерами p_F соответствующего сечения ферми-поверхности. Размеры же траектории в обычном пространстве

$$r_B \sim cp_F/eB.$$

Эта величина обратно пропорциональна магнитному полю. Поэтому в гальваномагнитных явлениях надо считать слабыми поля, для которых $r_B \gg l$, а сильными — для которых

$$r_B \ll l. \tag{84,1}$$

В случае слабых магнитных полей кинетическое рассмотрение не приводит (при произвольном законе дисперсии электронов) к чему-либо новому по сравнению с результатами чисто феноменологической теории. Характер зависимости компонент тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ от магнитного поля в этом случае соответствует просто разложению по степеням B с учетом требований, налагаемых принципом симметрии кинетических коэффициентов (см. VIII, § 21).

В сильных же магнитных полях выяснение этой зависимости требует кинетического рассмотрения. Условие сильного поля (84,1) фактически выполняется лишь при низких температурах, когда пробег l достаточно велик. При этом металл обычно находится в области своего остаточного сопротивления, связанного с рассеянием электронов на примесных атомах; этот случай мы и будем иметь в виду. Взаимодействие электронов проводимости с атомом примеси происходит на расстояниях порядка величины постоянной решетки d. Если $r_B \ll l$, но в то же время $r_B \gg d$, то наличие магнитного поля не сказывается на этом взаимодействии и тем самым — на интеграле столкновений. В этих условиях характер зависимости тензора проводимости от магнитного поля оказывается не зависящим от конкретного вида интеграла столкновений. В то же время он существенно зависит от структуры энергетического спектра электронов проводимости — от формы ферми-поверхности [1]).

Приступим к составлению кинетического уравнения, описывающего гальваномагнитные явления.

Функцию распределения будет целесообразным выражать теперь не через декартовы составляющие квазиимпульса $\mathbf{p}$, а через другие переменные, связанные с траекторией электрона: энергию ε, компоненту квазиимпульса p_z вдоль направления магнитного поля (ось z) и «время движения электрона по импульсной траектории» от некоторой фиксированной точки в данную. Последняя переменная (которую мы обозначим буквой τ) вводится с помощью квазиклассического уравнения движения электрона проводимости в магнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{e}{c}[\mathbf{vB}], \qquad \mathbf{v} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}};$$

x- и y-компоненты этого уравнения:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{e}{c}v_yB, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = \frac{e}{c}v_xB. \tag{84,2}$$

Взяв сумму квадратов этих уравнений и введя элемент ds длины импульсной траектории в плоскости xy $(ds^2 = dp_x^2 + dp_y^2)$, получим

$$d\tau = \frac{c}{eB}\frac{ds}{v_\perp}, \qquad v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2; \tag{84,3}$$

интегрированием этого равенства и определяется новая переменная τ через старые p_x, p_y, p_z.

Левая сторона кинетического уравнения в новых переменных принимает вид [2])

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial n}{\partial p_z}\dot{p}_z + \frac{\partial n}{\partial\tau}\dot{\tau}. \tag{84,4}$$

Как обычно, функцию распределения будем искать в виде

$$n = n_0(\varepsilon) + \delta\tilde{n}(\varepsilon, p_z, \tau). \tag{84,5}$$

В конце § 74 было показано, что в постоянных электрическом и магнитном полях линеаризованное по $\delta\tilde{n}$ кинетическое урав-

[1]) Излагаемая ниже теория принадлежит *И. М. Лифшицу, М. Я. Азбелю* и *М. И. Каганову* (1956).

[2]) Использование квазиклассического кинетического уравнения означает пренебрежение эффектами, связанными с квантованием уровней энергии в магнитном поле. Эти эффекты будут обсуждены ниже, в § 90.

нение для квазичастиц ферми-жидкости пишется так же, как оно писалось бы для частиц ферми-газа. При этом производные $\dot{\varepsilon}$, $\dot{p}_z$, $\dot{\tau}$ надо выразить с помощью уравнения движения отдельного электрона в электромагнитном поле:

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]. \qquad (84,6)$$

Для производной $\dot{\varepsilon}$ имеем отсюда

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{vE};$$

магнитное поле выпадает в соответствии с тем, что оно не производит работы над зарядом. Далее, при поле $\mathbf{B}$, направленном по оси z, имеем $\dot{p}_z = -eE_z$. Наконец, из сравнения уравнений (84,2) и (84,6) видно, что производная $d\tau/dt$ отличается от 1 только за счет поля $\mathbf{E}$ (учет этого отличия не понадобится).

Поскольку равновесная функция распределения n_0 зависит только от ε, а ε, p_z, τ — назависимые переменные, то $\partial n_0/\partial p_z = 0$, $\partial n_0/\partial \tau = 0$. Электрическое поле рассматривается как сколь угодно малое; при линеаризации кинетического уравнения члены, содержащие одновременно малые величины $\delta\tilde{n}$ и $\mathbf{E}$, следует опустить. Тогда выражение (84,4) сводится к

$$\frac{dn}{dt} \approx -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e\mathbf{vE} + \frac{\partial \delta\tilde{n}}{\partial \tau}.$$

Представим $\delta\tilde{n}$ в виде

$$\delta\tilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e\mathbf{Eg}, \qquad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\varepsilon, p_z, \tau) \qquad (84,7)$$

(ср. (78,6)). Тогда окончательно левая сторона кинетического уравнения примет вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e\mathbf{E}\left(-\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}\right). \qquad (84,8)$$

Интеграл же столкновений в правой стороне кинетического уравнения после линеаризации запишем в виде

$$\mathrm{St}\, n = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e\mathbf{E} I(\mathbf{g}) \qquad (84,9)$$

(напомним, что в интеграле столкновений, описывающем упругое рассеяние на примесных атомах, любой множитель в $\delta\tilde{n}$, зависящий только от ε, может быть вынесен из-под знака интеграла); конкретный вид линейного интегрального оператора $I(\mathbf{g})$ нам не понадобится.

Приравняв друг другу выражения (84,8) и (84,9), получим окончательно кинетическое уравнение, определяющее функцию $\mathbf{g}$:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} - I(\mathbf{g}) = \mathbf{v}. \tag{84,10}$$

Тензор проводимости дается интегралом (78,9):

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2 \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} v_\alpha g_\beta \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Переход в этом интеграле к новым переменным осуществляется заменой $d^3p \longrightarrow |J|\, d\varepsilon\, dp_z\, d\tau$, где

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(\tau, \varepsilon, p_z)}$$

— якобиан преобразования. Его легко найти прямо из уравнений (84,2), определяющих переменную τ. Записав обе стороны, скажем, первого из этих уравнений, в виде якобианов,

$$\frac{\partial(p_x, \varepsilon, p_z)}{\partial(\tau, \varepsilon, p_z)} = -\frac{eB}{c} \frac{\partial(\varepsilon, p_x, p_z)}{\partial(p_y, p_x, p_z)},$$

и умножив обе стороны равенства на $\partial(p_y, p_x, p_z)/\partial(\varepsilon, p_x, p_z)$, найдем $|J| = eB/c$. Пренебрегая температурным размытием распределения n_0, полагаем, как обычно, $\partial n_0/\partial\varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$, после чего получим окончательное выражение

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^3B}{c(2\pi\hbar)^3} \int v_\alpha g_\beta\, d\tau\, dp_z, \tag{84,11}$$

где интегрирование производится по ферми-поверхности.

Согласно определению (84,3), переменная τ пропорциональна $1/B$. Поэтому член $\partial\mathbf{g}/\partial\tau$ в линейном уравнении (84,10) пропорционален B и тем самым велик по сравнению с остальными членами. Это дает возможность решать уравнение последовательными приближениями, в виде ряда по степеням $1/B$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{(0)} + \mathbf{g}^{(1)} + \ldots, \tag{84,12}$$

где $\mathbf{g}^{(n)} \sim B^{-n}$[1]). Для членов этого ряда имеем уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{(0)}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{g}^{(1)}}{\partial \tau} = I(\mathbf{g}^{(0)}) + \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}^{(2)}}{\partial \tau} = I(\mathbf{g}^{(1)}), \ \ldots \tag{84,13}$$

---

[1]) Подобно тому, как это делалось в § 59 при вычислении кинетических коэффициентов плазмы в сильном магнитном поле.

Решение этих уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(0)} &= \mathbf{C}^{(0)}, \\ \mathbf{g}^{(1)} &= \int_0^\tau [I(\mathbf{C}^{(0)}) + \mathbf{v}(\tau)]\,d\tau + \mathbf{C}^{(1)}, \\ \mathbf{g}^{(2)} &= \int_0^\tau I(\mathbf{g}^{(1)})\,d\tau + \mathbf{C}^{(2)}, \ \ldots, \end{aligned} \tag{84,14}$$

где $\mathbf{C}^{(0)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$, ... — функции только от ε и p_z.

Функция $\mathbf{g}$ должна удовлетворять определенным условиям. Если импульсные траектории электронов (т. е. контуры сечений ферми-поверхности плоскостями $p_z = \mathrm{const}$) замкнуты, то движение электронов периодично; соответственно должна быть периодична по переменной τ (с периодом T, зависящим от p_z) также и функция $\mathbf{g}(\varepsilon, p_z, \tau)$. Если же траектория открыта, то движение в импульсном пространстве инфинитно и функция $\mathbf{g}$ должна удовлетворять лишь условию конечности.

Усредним уравнения (84,13) по τ. Если функции $\mathbf{g}$ периодичны, то среднее по периоду значение

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}\,d\tau = \frac{\mathbf{g}(T) - \mathbf{g}(0)}{T}$$

равно нулю, так как $\mathbf{g}(T) = \mathbf{g}(0)$. Если функции $\mathbf{g}$ не периодичны, то усреднение производится по бесконечному интервалу τ и среднее значение обращается в нуль ввиду конечности $\mathbf{g}$. Таким образом, во всех случаях усреднение уравнений дает

$$\overline{I(\mathbf{g}^{(0)})} \equiv \overline{I(\mathbf{C}^{(0)})} = -\overline{\mathbf{v}}, \quad \overline{I(\mathbf{g}^{(1)})} = 0, \ \ldots; \tag{84,15}$$

эти соотношения определяют в принципе функции $\mathbf{C}^{(0)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$, ...

Переходя к вычислению тензора проводимости, напомним предварительно некоторые общие его свойства, известные из феноменологической теории (см. VIII, § 21).

Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \tag{84,16}$$

Тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ можно разделить на симметричную и антисимметричную части:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta} + \sigma^{(a)}_{\alpha\beta}. \tag{84,17}$$

Для них имеем, с учетом (85,16):

$$\begin{aligned} \sigma^{(s)}_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) &= \sigma^{(s)}_{\beta\alpha}(\mathbf{B}) = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta}(-\mathbf{B}), \\ \sigma^{(a)}_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) &= -\sigma^{(a)}_{\beta\alpha}(\mathbf{B}) = -\sigma^{(a)}_{\alpha\beta}(-\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{84,18}$$

Таким образом, компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ являются четными, а $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ — нечетными функциями **B**. Вместо антисимметричного тензора $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ можно ввести дуальный ему аксиальный вектор **a** по определению

$$a_{xy}=a_z,\quad a_{zx}=a_y,\quad a_{yz}=a_x.$$

Тогда компоненты вектора плотности тока представятся в виде

$$j_\alpha=\sigma_{\alpha\beta}E_\beta=\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}E_\beta+[\mathbf{Ea}]_\alpha. \tag{84,19}$$

Диссипация энергии при протекании тока определяется лишь симметричной частью тензора проводимости: $\mathbf{jE}=\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}E_\alpha E_\beta$. Таким же образом можно разложить и обратный тензор $\rho_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ на симметричную часть и антисимметричную часть, дуальную аксиальному вектору **b**. Тогда **E** выразится через **j** формулой

$$E_\alpha=\rho_{\alpha\beta}^{(s)}j_\beta+[\mathbf{jb}]_\alpha. \tag{84,20}$$

Член [**Ea**] в токе, или член [**jb**] в электрическом поле, описывает *эффект Холла.*

§ 85. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Частные случаи

Замкнутые траектории

Начнем со случаев, когда все (т. е. при всех p_z) импульсные траектории электронов при заданном направлении **B** замкнуты. Траектории всегда замкнуты при любом направлении **B** при замкнутых ферми-поверхностях. Что касается открытых ферми-поверхностей, то здесь возможны как случаи, когда траектории замкнуты при любом направлении **B**, так и случаи, когда сечения замкнуты лишь при определенных (или в определенных интервалах) направлениях поля.

При движении по замкнутой (в плоскости xy) траектории средние значения скоростей в этой плоскости равны нулю: $\overline{v}_x=\overline{v}_y=0$; это ясно из уравнений движения (84,2) с учетом того, что при прохождении траектории p_x и p_y возвращаются к исходным значениям. Значение же $\overline{v}_z$ всегда отлично от нуля ввиду инфинитности движения в направлении поля. Первое из равенств (84,15) дает теперь

$$\overline{I(C_x^{(0)})}=\overline{I(C_y^{(0)})}=0,$$

откуда $C_x^{(0)}=C_y^{(0)}=0$ [1]). Решение (84,14) принимает в этом случае

[1]) Нет никаких оснований для того, чтобы линейное однородное уравнение $\overline{I(C)}=0$ имело бы какие-либо решения помимо тривиального $C=0$.