

Таким образом, компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ являются четными, а $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ — нечетными функциями \mathbf{V} . Вместо антисимметричного тензора $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ можно ввести дуальный ему аксиальный вектор \mathbf{a} по определению

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{zx} = a_y, \quad a_{yz} = a_x.$$

Тогда компоненты вектора плотности тока представляются в виде

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} E_\beta + [\mathbf{Ea}]_\alpha. \quad (84,19)$$

Диссипация энергии при протекании тока определяется лишь симметричной частью тензора проводимости: $\mathbf{jE} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} E_\alpha E_\beta$. Таким же образом можно разложить и обратный тензор $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ на симметричную часть и антисимметричную часть, дуальную аксиальному вектору \mathbf{b} . Тогда \mathbf{E} выразится через \mathbf{j} формулой

$$E_\alpha = \rho_{\alpha\beta}^{(s)} j_\beta + [\mathbf{jb}]_\alpha. \quad (84,20)$$

Член $[\mathbf{Ea}]$ в токе, или член $[\mathbf{jb}]$ в электрическом поле, описывает эффект Холла.

§ 85. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Частные случаи

Замкнутые траектории

Начнем со случаев, когда все (т. е. при всех p_z) импульсные траектории электронов при заданном направлении \mathbf{V} замкнуты. Траектории всегда замкнуты при любом направлении \mathbf{V} при замкнутых ферми-поверхностях. Что касается открытых ферми-поверхностей, то здесь возможны как случаи, когда траектории замкнуты при любом направлении \mathbf{V} , так и случаи, когда сечения замкнуты лишь при определенных (или в определенных интервалах) направлениях поля.

При движении по замкнутой (в плоскости xy) траектории средние значения скоростей в этой плоскости равны нулю: $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$; это ясно из уравнений движения (84,2) с учетом того, что при прохождении траектории p_x и p_y возвращаются к исходным значениям. Значение же \bar{v}_z всегда отлично от нуля ввиду инфинитности движения в направлении поля. Первое из равенств (84,15) дает теперь

$$\overline{I(C_x^{(0)})} = \overline{I(C_y^{(0)})} = 0,$$

откуда $C_x^{(0)} = C_y^{(0)} = 0$ ¹⁾. Решение (84,14) принимает в этом случае

¹⁾ Нет никаких оснований для того, чтобы линейное однородное уравнение $\overline{I(C)} = 0$ имело бы какие-либо решения помимо тривиального $C = 0$.

ВИД

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{c}{eB} p_y + C_x^{(1)} + g_x^{(2)} + \dots, \\ g_y &= -\frac{c}{eB} p_x + C_y^{(1)} + g_y^{(2)} + \dots, \\ g_z &= C_z^{(0)} + g_z^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (85,1)$$

(интегрирование функции $\mathbf{v}(\tau)$ произведено с помощью уравнений (84,2)).

Компоненты тензора проводимости вычисляются по формуле (84,11). Так,

$$\sigma_{xx} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[\frac{c}{eB} p_y + C_x^{(1)} + \chi_x^{(2)} \right] d\tau dp_z$$

(v_x снова выражено с помощью (84,2)). Поскольку $C_x^{(1)}$ не зависит от τ , интегрирование по τ в первых двух членах сводится к интегрированию производных $dp_y^2/d\tau$ и $dp_y/d\tau$ и дает нуль. Таким образом, вклад в интеграл дает лишь член с $g_x^{(2)}$, так что $\sigma_{xx} \sim B^{-2}$.

Далее, вычисляем

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[-\frac{c}{eB} p_x + C_y^{(1)} \right] d\tau dp_z.$$

Интегрирование второго члена снова дает нуль, а в первом имеем

$$\oint p_x \frac{dp_y}{d\tau} d\tau = \int p_x dp_y = \pm S(p_z),$$

где $S(p_z)$ — площадь сечения ферми-поверхности плоскостью $p_z = \text{const}$. Знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к случаям, когда внутри контура находится область меньших или больших энергий, т. е. когда замкнутая траектория является электронной или дырочной (см. IX, § 61); обозначим площадь S в первом случае как S_e , а во втором — как S_h . Разница в знаках в этих случаях возникает от изменения направления обхода траектории. Интегрирование площади S по p_z дает объем Ω импульсного пространства, заключенный внутри ферми-поверхности (если замкнутые траектории расположены на открытой ферми-поверхности, то Ω — объем, ограниченный этой поверхностью и гранями ячейки обратной решетки). Таким образом,

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{B} \frac{2(\Omega_h - \Omega_e)}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{ec}{B} (N_h - N_e), \quad (85,2)$$

где Ω_e и Ω_h — объемы электронных и дырочных полостей ферми-поверхности. Величины

$$N_e = \frac{2\Omega_e}{(2\pi\hbar)^3}, \quad N_h = \frac{2\Omega_h}{(2\pi\hbar)^3}$$

представляют собой соответственно числа занятых электронных состояний с энергиями $\varepsilon < \varepsilon_F$ и свободных состояний с $\varepsilon > \varepsilon_F$ (отнесенные к единице объема кристалла). В случае замкнутых ферми-поверхностей эти понятия имеют вполне определенный смысл и величины N_e и N_h представляют собой характеристику электронного спектра металла, не зависящую от направления поля \mathbf{B} ; в случае же открытых поверхностей смысл этих величин становится более условным, так как они могут оказаться зависящими от направления \mathbf{B} .

Выражение (85,2) — нечетная функция \mathbf{B} и потому входит в антисимметричную часть тензора $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$. Компонента же $\sigma_{xy}^{(s)}$ симметричной части тензора дается следующим членом разложения σ_{xy} , пропорциональным B^{-2} .

Аналогичным образом определяется зависимость от B остальных компонент $\sigma_{\alpha\beta}$. Так,

$$\sigma_{zz} = \frac{2e^3 B}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \oint v_z C_z^{(0)} d\tau dp_z.$$

Интегрирование по τ вносит множитель B^{-1} , а $C_z^{(0)}$ от B не зависит; поэтому и σ_{zz} не зависит от B .

В результате найдем, что

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \text{const}, \text{ остальные } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \sim B^{-2}, \quad a \sim B^{-1}. \quad (85,3)$$

При этом все компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ и a зависят от вида интеграла столкновений, за исключением лишь

$$a_z = \frac{ec}{B} (N_h - N_e).$$

Отметим, что все $\sigma_{\alpha\beta}$, за исключением лишь σ_{zz} , стремятся при $B \rightarrow \infty$ к нулю. Физическая причина такого поведения состоит в локализации электронов на орбитах, малых по сравнению с длиной пробега; конечность же σ_{zz} связана с тем, что движение электронов вдоль магнитного поля всегда остается инфинитным.

Малым параметром разложения является отношение r_B/l . Поэтому пропорциональные B^{-2} компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ можно оценить по порядку величины как

$$\sigma^{(s)} \sim \sigma_0 (r_B/l)^2, \quad \sigma_0 \sim Ne^2 l / p_F.$$

Обратим внимание на то, что $\sigma^{(s)} \sim 1/l$; это значит, что при увеличении длины пробега поперечная проводимость в магнитном поле стремится к нулю, а не к бесконечности, как в отсутствие поля.

¹⁾ Из вывода кинетического уравнения ясно, что B входит в него не как абсолютная величина вектора \mathbf{B} , а как проекция $B_z = B$. Замена $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ требует поэтому и замены $B \rightarrow -B$ в написанных формулах.

Компоненты же антисимметричной части тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ оцениваются как

$$\sigma^{(a)} \sim \sigma_0 r_B / l \sim ecN/B.$$

Подчеркнем, однако, что независимость этой оценки от l не означает независимости точных значений $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ от конкретного вида интеграла столкновений (исключение составляет лишь $\sigma_{xy}^{(a)}$); точное вычисление тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ требовало бы полного определения функций $\mathbf{C}^{(1)}$ и $\mathbf{g}^{(2)}$ путем решения конкретного кинетического уравнения.

Из (85,3) можно найти также предельные законы зависимости от B компонент обратного тензора $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$. Сохраняя лишь члены наиболее низкого порядка по $1/B$, найдем

$$\rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{const}, \quad b_x, b_y = \text{const}, \quad b_z \propto B, \quad (85,4)$$

причем все эти величины зависят от вида интеграла столкновений, за исключением лишь

$$b_z \approx -\frac{1}{a_z} = \frac{B}{ec(N_e - N_h)}. \quad (85,5)$$

Все компоненты $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ стремятся при $B \rightarrow \infty$ к постоянным пределам.

Особого рассмотрения требуют компенсированные металлы, в которых $N_e = N_h$. В этом случае выражение (85,2) обращается в нуль и разложение $\sigma_{xy}^{(a)}$ начинается с члена, пропорционального B^{-3} . Таким образом, в этом случае

$$a_x, a_y \propto B^{-1}, \quad a_z \propto B^{-3}; \quad (85,6)$$

зависимость же $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ от \mathbf{B} остается прежней. Для обратного тензора получим теперь

$$\begin{aligned} \rho_{zz}^{(s)} = \text{const}, \quad \rho_{yz}^{(s)}, \quad \rho_{xz}^{(s)} = \text{const}, \\ \rho_{xy}^{(s)}, \quad \rho_{xx}^{(s)}, \quad \rho_{yy}^{(s)} \propto B^2, \quad \mathbf{b} \propto B. \end{aligned} \quad (85,7)$$

Открытые траектории

Для металлов с открытыми ферми-поверхностями, допускающими открытые траектории, возможны разнообразные случаи,

¹⁾ Обратный тензор должен вычисляться, разумеется, по сумме $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ и лишь затем разделяться на симметричную и антисимметричную части. Таким образом, можно получить формулы

$$\rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{1}{\sigma} \{ \sigma_{\alpha\beta}^{(s)-1} \sigma^{(s)} + a_\alpha a_\beta \}, \quad b_\alpha = -\frac{1}{\sigma} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} a_\beta,$$

где $\sigma = \sigma^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} a_\alpha a_\beta$ — определитель тензора $\sigma_{\alpha\beta}$, а $\sigma^{(s)}$ — определитель его симметричной части (см. задачу в VIII, § 21).

из которых мы рассмотрим здесь лишь один, иллюстрирующий характерные особенности возникающей ситуации.

Рассмотрим ферми-поверхность типа «гофрированного цилиндра», проходящего непрерывно из одной ячейки обратной решетки в следующие (рис. 30). Если магнитное поле не перпендикулярно оси цилиндра, все сечения замкнуты; при этом асимптотическая зависимость $\sigma_{\alpha\beta}$ от \mathbf{B} дается прежним законом (85,3).

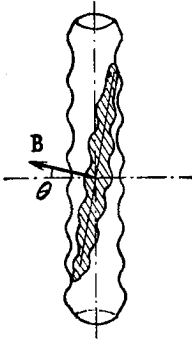


Рис. 30.

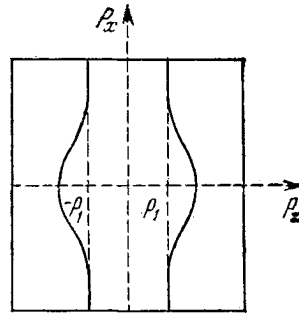


Рис. 31.

Если же магнитное поле перпендикулярно оси цилиндра, то существуют открытые сечения. Как всегда, выбираем ось z вдоль направления поля; ось же x в этом случае направим вдоль оси цилиндра (на рис. 31 изображен разрез участка ферми-поверхности в одной ячейке). Траектории открыты при $|p_z| < |p_1|$, причем инфинитны в направлении оси p_x . Средние значения скорости:

$$\bar{v}_x = \frac{c}{eB} \overline{\frac{dp_y}{d\tau}} = 0, \quad \bar{v}_y = -\frac{c}{eB} \overline{\frac{dp_x}{d\tau}} \neq 0,$$

поскольку p_x меняется неограниченно; как всегда, $\bar{v}_z \neq 0$. Из компонент вектора $\mathbf{C}^{(0)}$ в решении кинетического уравнения будут теперь отличны от нуля $C_y^{(0)}$ и $C_z^{(0)}$, и потому в решении кинетического уравнения (85,1) вторая строка заменится на

$$g_y = C_y^{(0)} + g_y^{(1)} + \dots$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, найдем теперь, что

$$\sigma_{xx}^{(s)} \sim B^{-2}, \text{ остальные } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{const}, \quad a_x \sim B^{-3}, \quad a_y, a_z \sim B^{-1}. \quad (85,8)$$

Для обратного тензора получим отсюда

$$\rho_{xx}^{(s)} \sim B^2, \text{ остальные } \rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{const}, \quad b_x \sim B^{-1}, \quad b_y, b_z \sim B. \quad (85,9)$$

Обратим внимание на резкую анизотропию сопротивления в плоскости, перпендикулярной магнитному полю: сопротивление ρ_{yy} вдоль оси y стремится к постоянному пределу, в то время как в направлении оси x оно возрастает с увеличением поля пропорционально его квадрату¹⁾.

Другой характерной особенностью гальваномагнитных свойств металлов с открытой поверхностью Ферми является их резкая зависимость от направления сильного магнитного поля. В данном случае изменение имеет место при приближении направления \mathbf{B} к плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, когда происходит переход от законов (85,3—4) к законам (85,8—9). Когда направление \mathbf{B} наклонено под малым углом θ к указанной плоскости (см. рис. 30), размеры импульсной траектории электрона становятся большими — порядка p_F/θ , где p_F — поперечные размеры цилиндрической ферми-поверхности. Соответственно становится большим и размер траектории в истинном пространстве — порядка r_B/θ , где r_B — ларморовский радиус, отвечающий импульсу p_F . В области углов, для которых $r_B/\theta l \sim 1$, использованное выше разложение по степеням r_B/l становится неприменимым; в ней и происходит изменение зависимости сопротивления от поля.

Подчеркнем, что во всем изложении речь шла, разумеется, о монокристаллах. В поликристаллическом образце происходит усреднение анизотропных гальваномагнитных свойств, зависящее от распределения кристаллитов по направлениям.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть термомагнитные явления в металле в сильном магнитном поле. При этом оказалось бы, в частности, что компоненты тензора электронной теплопроводности стремятся при $B \rightarrow \infty$ к нулю. Но в этих условиях становится существенным перенос тепла фононами, возникает необходимость в учете также и электрон-фононного взаимодействия и вся картина сильно усложняется.

§ 86. Аномальный скин-эффект

Как известно из макроскопической электродинамики, переменное электромагнитное поле затухает в глубь проводника; вместе с полем оказывается сконцентрированным в поверхностном слое проводника также и вызываемый им электрический ток (так называемый *скин-эффект*). Напомним некоторые относящиеся сюда формулы (см. VIII, § 45, 46).

¹⁾ Напомним (см. IX, § 57), что траектория электрона в плоскости xy истинного пространства отличается от траектории в плоскости $p_x p_y$ импульсного пространства лишь изменением масштаба и поворотом на 90° . Поэтому в данном случае движение электрона в реальном пространстве инфинитно в направлении оси y .