Обратим внимание на резкую анизотропию сопротивления в плоскости, перпендикулярной магнитному полю: сопротивление $\rho_{yy}$ вдоль оси $y$ стремится к постоянному пределу, в то время как в направлении оси $x$ оно возрастает с увеличением поля пропорционально его квадрату[1]).

Другой характерной особенностью гальваномагнитных свойств металлов с открытой поверхностью Ферми является их резкая зависимость от направления сильного магнитного поля. В данном случае изменение имеет место при приближении направления **B** к плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, когда происходит переход от законов (85,3—4) к законам (85,8—9). Когда направление **B** наклонено под малым углом $\theta$ к указанной плоскости (см. рис. 30), размеры импульсной траектории электрона становятся большими—порядка $p_F/\theta$, где $p_F$—поперечные размеры цилиндрической ферми-поверхности. Соответственно становится большим и размер траектории в истинном пространстве—порядка $r_B/\theta$, где $r_B$—ларморовский радиус, отвечающий импульсу $p_F$. В области углов, для которых $r_B/\theta l \sim 1$, использованное выше разложение по степеням $r_B/l$ становится неприменимым; в ней и происходит изменение зависимости сопротивления от поля.

Подчеркнем, что во всем изложении речь шла, разумеется, о монокристаллах. В поликристаллическом образце происходит усреднение анизотропных гальваномагнитных свойств, зависящее от распределения кристаллитов по направлениям.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть термомагнитные явления в металле в сильном магнитном поле. При этом оказалось бы, в частности, что компоненты тензора электронной теплопроводности стремятся при $B\to\infty$ к нулю. Но в этих условиях становится существенным перенос тепла фононами, возникает необходимость в учете также и электрон-фононного взаимодействия и вся картина сильно усложняется.

## § 86. Аномальный скин-эффект

Как известно из макроскопической электродинамики, переменное электромагнитное поле затухает в глубь проводника; вместе с полем оказывается сконцентрированным в поверхностном слое проводника также и вызываемый им электрический ток (так называемый *скин-эффект*). Напомним некоторые относящиеся сюда формулы (см. VIII, § 45, 46).

---

[1]) Напомним (см. IX, § 57), что траектория электрона в плоскости $xy$ истинного пространства отличается от траектории в плоскости $p_xp_y$ импульсного пространства лишь изменением масштаба и поворотом на 90°. Поэтому в данном случае движение электрона в реальном пространстве инфинитно в направлении оси $y$.

Квазистационарное электромагнитное поле в металле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{86,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{86,2}$$

(металл предполагается немагнитным, так что в нем $\mathbf{H} = \mathbf{B}$). При этом, разумеется, подразумевается выполненным общее условие применимости макроскопических уравнений: расстояния $\delta$, на которых поле существенно меняется, велики по сравнению с атомными размерами. Если, сверх того, эти расстояния велики также и по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости $l$, то связь плотности тока $\mathbf{j}$ с полем $\mathbf{E}$ дается линейными соотношениями, связывающими их значения в одной и той же точке пространства: $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta$, где $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор проводимости. Скин-эффект в этих условиях называют *нормальным*. Рассмотрим его, предполагая среду изотропной (или кристаллом кубической симметрии); тогда тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ сводится к скаляру, так что $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

Предположим простейшие геометрические условия, когда металл занимает полупространство ($x > 0$), ограниченное плоскостью $x = 0$. К металлу приложено однородное внешнее электрическое поле, параллельное его поверхности и меняющееся со временем с частотой $\omega$. Уравнения (86,1—2) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{86,3}$$

В силу симметрии задачи, распределения всех величин в металле будут функциями только одной координаты $x$. Из первого уравнения (86,3) следует тогда, что магнитное поле $\mathbf{B}$ везде параллельно плоскости границы. Мы удовлетворим всем уравнениям, предположив, что и электрическое поле $\mathbf{E}$ лежит везде в той же плоскости. При этом автоматически выполнится и необходимое граничное условие исчезновения нормальной к поверхности металла компоненты тока: из $E_x = 0$ следует, что везде и $j_x = 0$[1].

Исключая $\mathbf{B}$ из первых двух уравнений (86,3), находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi i\omega\sigma}{c^2}\mathbf{E}.$$

---

[1]) В анизотропной среде ситуация меняется. Для выполнения указанного условия должно быть тогда введено наряду с тангенциальным также и нормальное к поверхности электрическое поле.

Для тангенциального поля, зависящего только от $x$, имеем $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$ и уравнение принимает вид

$$\mathbf{E}''=-\frac{4\pi i\omega\sigma}{c^2}\mathbf{E}, \tag{86,4}$$

где штрих означает дифференцирование по $x$. Его решение, обращающееся в нуль при $x\to\infty$, есть

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}e^{(i-1)x/\delta}, \tag{86,5}$$

где $\mathbf{E}_0$ — амплитуда поля на поверхности металла, а

$$\delta=c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}. \tag{86,6}$$

Величину $\delta$ называют *глубиной проникновения* поля; она убывает с увеличением частоты поля. Магнитное поле в металле затухает по тому же закону; из уравнений (86,3) следует, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ связаны везде соотношением $\mathbf{E}=\zeta[\mathbf{Bn}]$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (направленной внутрь металла, т. е. в положительном направлении оси $x$), а

$$\zeta=(1-i)\frac{\omega\delta}{2c}=(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}. \tag{86,7}$$

Этим соотношением связаны, в частности, и значения полей на самой поверхности металла:

$$\mathbf{E}_0=\zeta[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]. \tag{86,8}$$

Величину $\zeta$ называют *поверхностным импедансом* металла. Напомним, что его вещественная часть определяет диссипацию энергии поля в металле (см. VIII, § 67).

Для того чтобы имела место связь $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ между током и электрическим полем в той же точке пространства и в тот же момент времени, длина свободного пробега электронов $l$ и время свободного пробега $\tau\sim l/v_F$ должны удовлетворять условиям $l\ll\delta$ и $\tau\omega\ll 1$: $l$ должно быть мало по сравнению с характерным расстоянием изменения поля $\delta$, а $\tau$ мало по сравнению с периодом поля. При нарушении первого из этих условий связь между током и полем перестает быть локальной, возникает пространственная дисперсия проводимости. Нарушение же второго условия приводит к появлению частотной дисперсии проводимости. Для выяснения связи между током и полем надо обратиться тогда к кинетическому уравнению.

Таким образом, характер скин-эффекта зависит от относительной величины трех характерных размеров: $\delta$, $l$ и $v_F/\omega$. Нормальному скин-эффекту, описываемому формулами (86,5—8), отвечает область наиболее низких частот, при которых

$$l\ll\delta,\quad l\ll v_F/\omega. \tag{86,9}$$

При увеличении частоты поля или при увеличении длины пробега (при уменьшении температуры металла) глубина проникновения возрастает. В металлах обычно первым нарушается условие $\delta \ll l$ и связь тока с полем становится нелокальной; о скин-эффекте в этих условиях говорят как об *аномальном*. Мы рассмотрим в этом параграфе предельно аномальный случай, когда

$$\delta \ll l, \quad \delta \ll v_F/\omega. \tag{86,10}$$

Соотношение же между $l$ и $v_F/\omega$ может быть произвольным[1]).

Решение граничной задачи о скин-эффекте мы начнем со вспомогательной задачи о связи в неограниченном металле между током и переменным во времени и пространстве электрическим полем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}.$$

Волновой вектор поля предполагается удовлетворяющим неравенствам

$$1/k \ll l, \quad 1/k \ll v_F/\omega, \tag{86,11}$$

отвечающим условиям (86,10). Вместе с полем по тому же закону будет меняться и добавка $\delta n$ к функции распределения электронов.

В силу условия $v_F k \gg v_F/l \sim 1/\tau$, в кинетическом уравнении можно пренебречь интегралом столкновений $\mathrm{St}\, n \sim \delta n/\tau$ по сравнению с членом с пространственными производными $\mathbf{v}\, \partial n/\partial \mathbf{r} \sim v_F k \delta n$. В силу же условия $k v_F \gg \omega$ можно пренебречь также и производной по времени $\partial n/\partial t \sim \omega \delta n$.

В силу последнего пренебрежения, кинетическое уравнение для квазичастиц электронной ферми-жидкости снова сводится к уравнению для газа путем переопределения функции распределения — замены $\delta n$ на $\delta \tilde{n}$ из (74,13). В данном случае, после указанных пренебрежений, кинетическое уравнение имеет простой вид

$$\mathbf{v}\frac{\partial\, \delta \tilde{n}}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Положив

$$\frac{\partial\, \delta \tilde{n}}{\partial \mathbf{r}} = i\mathbf{k}\delta \tilde{n}, \qquad \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon},$$

находим отсюда

$$\delta \tilde{n} = -\frac{ie\mathbf{E}\mathbf{v}}{\mathbf{k}\mathbf{v}}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}. \tag{86,12}$$

[1]) Равенство $\delta \sim l$ достигается при $\omega \sim c^2/\sigma l^2$, т. е. (если воспользоваться оценкой $\sigma \sim le^2 N/p_F$) при $\omega \sim c^2 p_F/e^2 l^3 N$. Это значение совместно с неравенством $\delta \sim l \ll v_F/\omega$, если $l \gg c/\Omega$, где $\Omega \sim (Ne^2/m^*)^{1/2}$ — плазменная частота металла ($m^* \sim p_F/v_F$ — эффективная масса электронов проводимости). Для обычных металлов $\Omega \sim 10^{15}$—$10^{16}$ с$^{-1}$.

Это выражение имеет полюс при $\mathbf{kv}=0$. При вычислении тока

$$\mathbf{j}=-e\int \mathbf{v}\delta\tilde{n}\,\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

этот полюс должен обходиться путем замены $\mathbf{kv}\to\mathbf{kv}-i0$ [1]:

$$\mathbf{j}=ie^2\int\frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{Ev})}{\mathbf{kv}-i0}\,\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\,\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (86,13)$$

Пренебрегая, как обычно, температурным размытием равновесной функции распределения, пишем $\partial n_0/\partial\varepsilon=-\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)$ и преобразуем интеграл по $d^3p$ в интеграл по ферми-поверхности по формуле (74,20). Согласно известной формуле дифференциальной геометрии, элемент площади $dS=do_\nu/K$, где $do_\nu$ — элемент телесных углов для направления нормали $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности, а $K$ — гауссова кривизна поверхности, т. е. обратное произведение $K=1/R_1R_2$ ее главных радиусов кривизны в данной точке. Заметив также, что направление нормали к ферми-поверхности в каждой ее точке совпадает с направлением скорости $\mathbf{v}=\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, получим

$$\mathbf{j}=-\frac{2ie^2}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\boldsymbol{\nu}\,(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})}{K(\boldsymbol{\nu})}\,\frac{do_\nu}{\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}-i0}. \qquad (86,14)$$

Определяя направление $\boldsymbol{\nu}$ азимутальным и полярным углами $\varphi$ и $\theta$ относительно направления $\mathbf{k}$ как полярной оси, будем иметь $\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}=k\cos\theta$, $do_\nu=\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$.

Интегрирование в (86,14) по переменной $\mu=\cos\theta$ производится по отрезку $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ вещественной оси с обходом полюса $\mu=0$ по полуокружности снизу. Легко видеть, что интеграл по прямолинейным отрезкам (т. е. главное значение интеграла) при этом обращается в нуль, так что остается лишь вклад от обхода полюса. Для этого замечаем, что в силу четности функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ ферми-поверхность $\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_F$ инвариантна относительно замены $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$; поскольку изменение знака $\mathbf{p}$ меняет также и знак вектора нормали $\boldsymbol{\nu}$, отсюда следует, что $K(-\boldsymbol{\nu})=K(\boldsymbol{\nu})$. Интеграл в (86,14) можно поэтому представить в виде

$$\frac{1}{2}\left\{\int\frac{\boldsymbol{\nu}\,(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})\,do_\nu}{K(\boldsymbol{\nu})\,(\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}-i0)}-\int\frac{\boldsymbol{\nu}\,(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})\,do_\nu}{K(\boldsymbol{\nu})\,(\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}+i0)}\right\},$$

где в скобках стоит сумма интегралов, получающихся друг из друга заменой переменной интегрирования $\boldsymbol{\nu}\to-\boldsymbol{\nu}$; из этого выражения сделанное утверждение очевидно.

В полюсе подынтегрального выражения $\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}=k\cos\theta=0$, т. е. нормаль $\boldsymbol{\nu}$ перпендикулярна заданному направлению волнового вектора $\mathbf{k}$. Вычет по переменной $\cos\theta$ дается, следовательно,

[1]) Это отвечает обычной замене $\omega\to\omega+i0$ в разности $\omega-\mathbf{kv}$.

интегралом

$$\int \frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{E}\mathbf{v})}{kK\,(\mathbf{v})}\,d\varphi,$$

взятым по кривой, представляющей собой геометрическое место точек ферми-поверхности, в которых $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$.

Таким образом, окончательно находим связь тока с полем в виде

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k})\,E_\beta, \qquad (86,15)$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k}) = \frac{2\pi e^2 A_{\alpha\beta}}{(2\pi\hbar)^3 k}, \qquad A_{\alpha\beta} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{v_\alpha v_\beta}{K\,(\varphi)}\,d\varphi \qquad (86,16)$$

— вещественный тензор в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$; если направление $\mathbf{k}$ выбрано в качестве оси $x$, то индексы $\alpha$ и $\beta$ пробегают значения $y$, $z$. Вектор $\mathbf{j}$ лежит целиком в этой плоскости, т. е. поперечен по отношению к $\mathbf{k}$.

Обратим внимание на то, что вклад в ток возник только от электронов с $\mathbf{vk} = 0$, т. е. движущихся перпендикулярно волновому вектору. Это — естественное следствие приближения, в котором длина свободного пробега рассматривается как сколь угодно большая: при движении под углом к направлению $\mathbf{k}$ электрон в своем свободном движении проходит через поле, осциллирующее в пространстве и эти осцилляции погашают суммарное воздействие поля на электрон. В следующем приближении, при учете конечности произведения $kl$, вклад в ток возникал бы уже от электронов, движущихся в малом интервале углов $\sim 1/kl$ относительно плоскости, перпендикулярной направлению $\mathbf{k}$.

Перейдем теперь непосредственно к задаче о проникновении поля при аномальном скин-эффекте. Здесь мы имеем дело с задачей о полупространстве, которую надо решать с учетом граничных условий на поверхности металла. Граничные условия для функции распределения зависят от физических свойств поверхности по отношению к падающим на нее электронам. Существенно, однако, что в данном случае в создании тока участвуют в основном лишь электроны, летящие почти параллельно поверхности металла (о них говорят как о *скользящих* электронах). Для таких электронов закон отражения в значительной степени не зависит от степени совершенства поверхности металла и близок к *зеркальному*, т. е. электроны отражаются с изменением знака нормальной к поверхности компоненты скорости $\mathbf{v}$ при неизменных тангенциальных составляющих (чтобы не прерывать изложение, более подробное обсуждение этого вопроса перенесем в конец этого параграфа).

Зеркальному отражению отвечает граничное условие для функции распределения:

$$\delta\tilde{n}(v_x, v_y, v_z) = \delta\tilde{n}(-v_x, v_y, v_z) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{86,17}$$

При таком условии задача о полупространстве эквивалентна задаче о неограниченной среде, в которой поле распределено симметрично по обе стороны плоскости $x=0$: $\mathbf{E}(t, x) = \mathbf{E}(t, -x)$. При этом электронам, отраженным от границ в задаче о полупространстве ($x > 0$), отвечают в задаче о неограниченном пространстве электроны, беспрепятственно прошедшие через плоскость $x=0$ со стороны $x < 0$.

В задаче о предельно аномальном скин-эффекте можно считать, что поле $\mathbf{E}$ (зависящее только от одной координаты $x$) направлено везде параллельно плоскости $x=0$. Согласно (86,15), в той же плоскости лежит и вектор тока $\mathbf{j}$, и потому автоматически удовлетворяется условие равенства нулю на поверхности металла нормальной к ней компоненты тока[1]).

Без предположения $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ для двумерного вектора $\mathbf{E}$ имеем вместо (86,4) уравнение

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}. \tag{86,18}$$

Будем далее подразумевать временной множитель $\exp(-i\omega t)$ во всех функциях опущенным, так что $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$, ... будут функциями только от $x$.

Функция $\mathbf{E}(x)$, симметрично продолженная в область $x < 0$, непрерывна при $x=0$. Но производная $\mathbf{E}'(x)$, будучи нечетной функцией $x$, испытывает при $x=0$ разрыв, меняя знак при прохождении переменной $x$ через нуль. Согласно уравнению (86,1), эти производные связаны с магнитным полем соотношением

$$\mathbf{E}' = \frac{i\omega}{c}[\mathbf{Bn}],$$

где $\mathbf{n}$ — снова единичный вектор в направлении оси $x$. В задаче о полупространстве мы имели бы поэтому при $x=0$ условие $\mathbf{E}' = i\omega[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]/c$, где $\mathbf{B}_0$ — поле на границе металла. В задаче о неограниченной среде этому отвечает условие

$$\mathbf{E}'(+0) - \mathbf{E}'(-0) = 2\frac{i\omega}{c}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}].$$

[1]) В следующих приближениях, при учете конечности отношения $\delta/l$, наряду с компонентами $\sigma_{\alpha\beta}$ тензора проводимости появляются также и компоненты $\sigma_{\alpha x}$, $\sigma_{xx}$. Для обеспечения граничного условия $j_x = 0$ должно быть тогда введено также и нормальное к поверхности поле $E_x$ (как это уже было отмечено в примечании на стр. 437).

Умножим уравнение (86,18) с обеих сторон на $e^{-ikx}$ и проинтегрируем по $x$ в пределах от $-\infty$ до $\infty$ [1]). В левой стороне уравнения пишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}'' e^{-ikx}\,dx = \int_{-\infty}^{0} (\mathbf{E}' e^{-ikx})'\,dx + \int_{0}^{\infty} (\mathbf{E}' e^{-ikx})'\,dx + ik \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}' e^{-ikx}\,dx.$$

Поскольку на бесконечности поле $\mathbf{E}(x)$ обращается в нуль, то первые два интеграла дают как раз разность $\mathbf{E}'(-0) - \mathbf{E}'(+0)$. В последнем же члене, ввиду непрерывности самой функции $\mathbf{E}(x)$, можно уже просто интегрировать по частям. В результате приходим к равенству

$$\frac{2i\omega}{c}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}] + k^2\mathbf{E}(k) = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}(k),$$

где $\mathbf{E}(k)$ и $\mathbf{j}(k)$ — фурье-образы функций $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{j}(x)$.

Согласно (86,15), эти фурье-образы связаны друг с другом соотношением $j_\alpha(k) = \sigma_{\alpha\beta}(k) E_\beta(k)$. Воспользовавшись этим, найдем для фурье-образа поля выражение

$$E_\alpha(k) = \zeta_{\alpha\beta}(k)[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]_\beta, \tag{86,19}$$

где $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ — двумерный тензор, задаваемый своим обратным:

$$\zeta_{\alpha\beta}^{-1}(k) = -\frac{c}{2i\omega}\left[k^2\delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\sigma_{\alpha\beta}(|k|)\right]. \tag{86,20}$$

Аргумент функций $\sigma_{\alpha\beta}$ написан как $|k|$, чтобы напомнить, что здесь фигурирует абсолютная величина вектора $\mathbf{k}$.

Сама функция $\mathbf{E}(x)$ получается из (86,19) умножением на $\exp(ikx)$ и интегрированием по $dk/2\pi$. Ввиду четности функций $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ имеем

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta_{\alpha\beta}(k)\cos kx\,dk \cdot [\mathbf{B}_0\mathbf{n}]_\beta. \tag{86,21}$$

В частности, значение поля на границе металла есть

$$E_{0\alpha} = \zeta_{\alpha\beta}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]_\beta, \qquad \zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta_{\alpha\beta}(k)\,dk. \tag{86,22}$$

Для фактического вычисления поверхностного импеданса выберем оси $y$ и $z$ в направлении главных осей симметричного тензора $\sigma_{\alpha\beta}(k)$. Вместе с $\sigma_{\alpha\beta}$ приводится к главным осям и тензор

[1]) Дальнейшие вычисления формально совпадают с ходом решения задачи о проникновении магнитного поля в сверхпроводник в IX, § 52.

$\zeta_{\alpha\beta}$, и его главные значения

$$\zeta^{(\alpha)} = -\frac{2i\omega}{\pi c}\int_0^\infty \frac{dk}{k^2 - ib^{(\alpha)}/k}, \quad b^{(\alpha)} = \frac{\omega e^2 A^{(\alpha)}}{\pi c^2 \hbar^3},$$

где $A^{(\alpha)}$ — главные значения тензора $A_{\alpha\beta}$. Интегрирование приводит к результату[1])

$$\zeta^{(\alpha)} = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\frac{2\pi^{1/3}\hbar}{3^{3/2}}\left(\frac{\omega^2}{ce^2 A^{(\alpha)}}\right)^{1/3}. \tag{86,23}$$

Величины $A^{(\alpha)}$ зависят только от характеристик — формы и размеров — ферми-поверхности. Отметим, что импеданс (86,23) оказывается не зависящим вовсе от длины пробега электронов. Для оценки по порядку величины можно считать, что радиусы кривизны ферми-поверхности $\sim p_F$; тогда $A \sim p_F^2$ и

$$\zeta \sim \left(\frac{\hbar^3\omega^2}{ce^2 p_F^2}\right)^{1/3}. \tag{86,24}$$

Напомним, что вещественная часть импеданса определяет диссипацию энергии поля в металле. В рассмотренном приближении (не учитывающем столкновений электронов) эта диссипация имеет природу затухания Ландау[2]).

Закон затухания электрического поля внутрь металла при аномальном скин-эффекте не экспоненциален, и потому понятие глубины проникновения не имеет в этом случае того буквального смысла, как в (86,5). Ввиду наличия в подынтегральном выражении в (86,21) осциллирующего множителя $\cos kx$, интеграл определяется (при заданном $x$) в основном областью значений $k \sim 1/x$. Существенное убывание функции $\mathbf{E}(x)$ происходит,

---

[1]) Путь интегрирования (правая вещественная полуось) можно повернуть на угол $-\pi/6$ в плоскости комплексного $k$, не пересекая при этом полюсов подынтегрального выражения. Интегрируя вдоль луча $k = u\exp(-i\pi/6)$, имеем

$$I = \int_0^\infty \frac{k\,dk}{k^3 - ib} = e^{i\pi/6}\int_0^\infty \frac{u\,du}{u^3 + b}$$

и, после подстановки $u^3 + b = b/\xi$,

$$I = \frac{e^{i\pi/6}}{3b^{1/3}}\int_0^1 \xi^{-2/3}(1-\xi)^{-1/3}d\xi = \frac{\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3)}{3b^{1/3}\Gamma(1)}e^{i\pi/6} = \frac{\pi\left(\sqrt{3} + i\right)}{3^{3/2}b^{1/3}}.$$

[2]) На явления, составляющие сущность аномального скин-эффекта, впервые указал *Г. Лондон* (*H. London*, 1940). Качественная теория этого эффекта была дана *Пиппардом* (*A. B. Pippard*, 1947), а изложенная количественная теория принадлежит *Рейтеру* и *Зондгеймеру* (*G. E. Reuter*, *E. H. Sondheimer*, 1948).

когда эти значения $k \gg b^{1/3}$[1]). Поэтому глубина проникновения по порядку величины равна $\delta \sim b^{-1/3}$, или

$$\delta \sim \left(\frac{c^2\hbar^3}{\omega e^2 A}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{c^2\hbar^3}{\omega e^2 p_F^2}\right)^{1/3}. \tag{86,25}$$

При увеличении частоты эта глубина продолжает убывать, но медленнее, чем при нормальном эффекте. Величины, определяемые выражениями (86,6) и (86,25) (обозначим их как $\delta_{\text{норм}}$ и $\delta_{\text{ан}}$), сравниваются по порядку величины при $\delta \sim l$. Поскольку одна из них убывает как $\omega^{-1/2}$, а другая как $\omega^{-1/3}$, то ясно, что при одном и том же значении $\omega$: $\delta_{\text{ан}}^3 \sim \delta_{\text{норм}}^2 l$.

Наконец, сделаем некоторые замечания по поводу характера отражения электронов от границы металла. Если поверхность идеальна (без дефектов) и совпадает с какой-либо кристаллической плоскостью, то расположение атомов в ней обладает периодичностью, отвечающей трансляционной симметрии кристаллической решетки. В таком случае при отражении электрона сохраняются наряду с энергией также и тангенциальные компоненты его квазиимпульса $p_y$, $p_z$. Нормальная же компонента квазиимпульса отраженного электрона, $p_x'$, определяется по значению $p_x$ падающего электрона уравнением

$$\varepsilon(p_x', p_y, p_z) = \varepsilon(p_x, p_y, p_z), \tag{86,26}$$

причем должно быть $v_x' = \partial\varepsilon/\partial p_x' > 0$ — отраженный электрон движется по направлению от границы (скорость же падающего электрона $v_x = \partial\varepsilon/\partial p_x < 0$). Уравнение (86,26) может иметь несколько таких корней, причем, вообще говоря, $v_x' \neq -v_x$.

Но для скользящих падающих электронов среди этих корней всегда имеется один, отвечающий небольшому изменению квазиимпульса, причем $v_x' = -v_x$ (т. е. отражение является зеркальным в буквальном смысле этого слова). Действительно, для электрона, движущегося почти параллельно границе, производная $v_x = \partial\varepsilon/\partial p_x$ мала; это значит, что на изоэнергетической поверхности в **p**-пространстве электрону отвечает точка $P$, находящаяся вблизи точки экстремума энергии $\varepsilon$ как функции $p_x$, т. е. точки, в которой $\partial\varepsilon/\partial p_x = 0$. Но вблизи такой точки, по другую сторону экстремума, всегда существует точка $P'$, в которой значение производной $\partial\varepsilon/\partial p_x$ отличается от значения в точке $P$ лишь знаком.

Можно показать, что отражение скользящего электрона с подавляющей вероятностью происходит именно с таким изменением квазиимпульса. Более того, это утверждение остается в силе и при отражении от несовершенной поверхности, содержащей

[1]) При $x \gg \delta$ интеграл (86,21) определяется значениями $k \ll b^{1/3}$. При этом $\zeta(k) \sim k$, а поле $\mathbf{E}(x)$ убывает как $x^{-2}$.

шероховатости атомных размеров, когда закона сохранения тангенциальных компонент квазиимпульса, строго говоря, уже не существует. Наглядное объяснение состоит в том, что волновая функция скользящего электрона медленно меняется вдоль оси $x$ и потому «не чувствует» атомных шероховатостей поверхности [1]).

Интересно, что значение поверхностного импеданса при предельно аномальном скин-эффекте фактически оказывается вообще малочувствительным к характеру отражения электронов. Так, при диффузном отражении (когда все направления отраженного электрона равновероятны вне зависимости от угла падения) значение импеданса отличается от (86,23) лишь множителем 9/8. Граничное условие при диффузном отражении от плоской поверхности формулируется как $\delta\tilde{n}(v_x > 0,\ v_y,\ v_z) = 0$ при $x = 0$. При этом, однако, метод Фурье оказывается непригодным и решение задачи должно производиться так называемым методом Винера—Хопфа [2]).

## § 87. Скин-эффект в инфракрасной области

Мы рассмотрели, таким образом, два предельных случая скин-эффекта: нормальный эффект, когда наименьшим из трех характерных размеров ($\delta$, $l$, $v_F/\omega$) является длина пробега $l$, и аномальный эффект, когда наименьшей является глубина проникновения $\delta$. Теперь мы рассмотрим третий случай, когда наименьшей длиной является

$$v_F/\omega \ll \delta, \quad v_F/\omega \ll l. \tag{87,1}$$

К этому случаю мы приходим естественным образом от аномального скин-эффекта при дальнейшем увеличении частоты; хотя глубина проникновения при этом убывает, но произведение $\omega\delta$ возрастает как $\omega^{2/3}$. В обычных металлах условия (87,1) осуществляются в инфракрасной области.

Условия (87,1) ограничивают область частот снизу. Но справедливость излагаемых ниже результатов, основанных на теории ферми-жидкости, ограничена также и сверху условием $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$. Нарушение этого условия приводило бы к возбуждению квазичастиц из глубины ферми-распределения, не имеющих смысла в рамках теории ферми-жидкости.

Для определения связи между током и электрическим полем надо снова обратиться к кинетическому уравнению. Но теперь член с производной по времени в силу условия $\omega \gg v_F/\delta$ велик

---

[1]) Доказательство указанных утверждений можно найти в обзорной статье: *Андреев А. Ф.*—УФН, 1971, т. 105, с. 113.

[2]) См. *Reuter G. E., Sondheimer E. H*—Proc. Roy. Soc., 1948, v. A195, p. 336.