Чисто мнимый импеданс означает полное отражение электромагнитной волны от поверхности металла, без диссипации. Этот результат естествен, поскольку в рассмотренном приближении не учитывались столкновения электронов, являющиеся источником диссипации.

Отметим, что с учетом (87,7) основные условия применимости рассматриваемой теории можно записать как

$$\Omega \gg \omega \gg \Omega v_F/c. \tag{87,10}$$

Левое неравенство обычно совместно с неравенством $\hbar\omega \gg \Theta$ (Θ — дебаевская температура). В этом случае фермиевский параметр v_F и функция f в формуле (87,3) должны браться не на самой ферми-поверхности, а при $|\varepsilon - \varepsilon_F| \gg \Theta$. Как было показано в IX, § 65, электрон-фононное взаимодействие приводит к тому, что v_F в этой области отличается от v_F в области $|\varepsilon - \varepsilon_F| \ll \Theta$ (существенной, например, для статических свойств металла при низких температурах); то же самое относится и к функции взаимодействия квазичастиц f.

§ 88. Геликоидальные волны в металле

Тот факт, что внешнее переменное электромагнитное поле не проникает в глубь металла, означает, другими словами, что в металле невозможно распространение незатухающих электромагнитных волн — с частотами вплоть до плазменной частоты, $\omega \sim \Omega$.

Ситуация, однако, радикально меняется при наличии постоянного магнитного поля **B**. Магнитное поле меняет характер движения электронов и тем самым оказывает сильное влияние на электромагнитные свойства металла. При этом существенно, что движение становится финитным в плоскости, перпендикулярной полю. В сильных полях, когда ларморовский радиус орбиты $r_B \sim cp_F/eB$ становится малым по сравнению с длиной пробега,

$$r_B \ll l \tag{88,1}$$

(или, что то же самое, $\omega_B\tau \gg 1$, где $\omega_B \sim v_F/r_B \sim eB/m^*c$ — ларморовская частота, $\tau \sim l/v_F$ — время свободного пробега), электрическая проводимость в поперечных к полю направлениях резко уменьшается, стремясь к нулю при $B \to \infty$. Можно сказать, что в этих направлениях металл ведет себя как диэлектрик, в результате чего уменьшается диссипация энергии в волнах с электрическим полем, поляризованным в плоскости, перпендикулярной **B**. Другими словами, становится возможным распространение таких волн как незатухающего (в первом приближении) процесса. При этом допустимые частоты волн ограничены условием

$$\omega \ll \omega_B; \tag{88,2}$$

лишь при этом условии траектории электронов успевают заметно искривиться за время периода поля, что и приводит к изменению электромагнитных свойств металла по отношению к этим частотам.

Финитность движения электрона (в плоскости, перпендикулярной **B**) предполагает и финитность его импульсной траектории — сечения ферми-поверхности. Поэтому сказанное выше относится к металлам с закрытыми ферми-поверхностями при любом направлении **B**, а к металлам с открытыми поверхностями — лишь при тех направлениях **B**, для которых сечения замкнуты. При открытых сечениях движение электронов в магнитном поле остается инфинитным, проводимость не убывает и распространение электромагнитных волн в соответствующих направлениях оказывается невозможным.

Незатухающие электромагнитные волны в металле можно рассматривать как бозевские ветви энергетического спектра электронной ферми-жидкости. Макроскопический характер этих волн проявляется в большой (по сравнению с постоянной решетки) величине длин волн. По этой причине этим возбуждениям отвечает лишь относительно очень малый фазовый объем и их вклад в термодинамические величины металла пренебрежим.

Напишем снова уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{88,3}$$

где через $\tilde{\mathbf{B}}$ обозначено (в отличие от постоянного **B**) переменное слабое магнитное поле волны. Исключим $\tilde{\mathbf{B}}$ из этих уравнений:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Для монохроматической плоской волны имеем отсюда

$$(-k_\alpha k_\gamma + k^2 \delta_{\alpha\gamma}) E_\gamma = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_\alpha. \tag{88,4}$$

Выразим поле **E** через ток согласно $E_\alpha = \rho_{\alpha\beta} j_\beta$, где $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ — тензор удельного сопротивления. Тогда получим систему однородных линейных уравнений

$$\left[k^2 \rho_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma \rho_{\gamma\beta} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta_{\alpha\beta}\right] j_\beta = 0. \tag{88,5}$$

Ее определитель и дает уравнение, определяющее закон дисперсии волн.

В §§ 84, 85 был найден вид тензора проводимости металла (в области его остаточного сопротивления) в сильном магнитном поле в стационарном случае. Выясним теперь, каким образом эти результаты должны быть изменены для нестационарного случая.

Временная и пространственная периодичность электрического поля (а с ним и переменной части функции распределения электронов) приводит к появлению в левой стороне кинетического уравнения членов

$$\frac{\partial\,\delta n}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial\,\delta\tilde{n}}{\partial \mathbf{r}}=-\,i\omega\,\delta n+i\mathbf{k}\mathbf{v}\,\delta\tilde{n}$$

(ср. (74,25)). Аналогично (84,7), представим функции δn и $\delta\tilde{n}$ в виде

$$\delta n=\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{E}\mathbf{h},\qquad \delta\tilde{n}=\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{E}\mathbf{g}.$$

Согласно (74,21), функции $\mathbf{h}$ и $\mathbf{g}$ связаны друг с другом линейным интегральным соотношением

$$\mathbf{g}=\mathbf{h}+\int f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'_F)\,\mathbf{h}'\,\frac{dS'_F}{v'_F\,(2\pi\hbar)^3}\equiv\hat{L}\mathbf{h}.$$

Таким образом, кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\tau}-[I(\mathbf{g})+i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g}-i(\mathbf{k}\mathbf{v})\,\mathbf{g}]=\mathbf{v}. \qquad (88,6)$$

Оно отличается от прежнего уравнения (84,10) заменой члена $I(\mathbf{g})$ выражением, стоящим здесь в квадратных скобках. Это выражение зависит теперь не только от характера рассеяния электронов на примесных атомах, но и от функции их взаимодействия друг с другом.

В силу условия $r_B\ll l$, член $I(\mathbf{g})$ в уравнении (88,6) мал по сравнению с членом $\partial\mathbf{g}/\partial\tau$, как он был мал и в прежнем уравнении (84,10). В силу условия $\omega\ll\omega_B$ мал также и член $i\omega\hat{L}^{-1}g\sim\sim i\omega g$. Наложим еще условие на волновой вектор: $kv_F\ll\omega_B$, т. е.

$$kr_B\ll 1 \qquad (88,7)$$

— длина волны должна быть велика по сравнению с ларморовским радиусом. Тогда будет мал и последний член в квадратных скобках в (88,6). В этих условиях развитый в § 84 метод решения кинетического уравнения последовательными приближениями остается в силе, а с ним остаются справедливыми и полученные там результаты для первых членов разложения тензора проводимости по степеням $1/B$. Но ввиду присутствия ω и $\mathbf{k}$

в уравнении (88,6) будет, вообще говоря, иметься частотная и пространственная дисперсия проводимости.

Наличие нескольких характерных параметров длины и времени и разнообразие геометрических свойств ферми-поверхностей приводят к многообразию явлений, связанных с распространением электромагнитных волн в металлах. Мы ограничимся рассмотрением (в этом и следующем параграфах) лишь некоторых характерных случаев.

Рассмотрим некомпенсированный металл с закрытой ферми-поверхностью. Согласно (85,4—5), наибольшей из компонент тензора сопротивления является

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ec(N_e - N_h)}; \tag{88,8}$$

она относится к бездиссипативной (антиэрмитовой) части тензора. Эта компонента вообще не зависела от вида интеграла столкновений, а потому не зависит и от вида выражения в квадратных скобках в уравнении (88,6). Формула (88,8) остается, следовательно, справедливой и в поле волны.

Описание среды с помощью тензора сопротивления $\rho_{\alpha\beta}$ (или проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$) эквивалентно описанию тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i \sigma_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{\omega\rho_{\alpha\beta}}{4\pi i}.$$

В данном случае тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ имеет лишь компоненты

$$\varepsilon_{xy}^{-1} = -\varepsilon_{yx}^{-1} = \frac{\omega B}{4\pi\, ice\,(N_e - N_h)}.$$

Это выражение совпадает с рассмотренным в § 56 в связи с геликоидальными волнами в плазме (отличаясь от него лишь заменой электронной плотности N_e на разность $N_e - N_h$). Поэтому полученные в § 56 результаты прямо переносятся и на рассматриваемые волны в металле, которые тоже называют *геликоидальными* [1]).

Закон дисперсии этих волн:

$$\omega = \frac{cB\,|\cos\theta|}{4\pi e\,|N_e - N_h|}, \tag{88,9}$$

где θ — угол между **k** и **B**. Электрическое поле волны эллиптически поляризовано в плоскости, перпендикулярной магнитному полю **B**. Выбрав (как и в § 56) направление **B** в качестве оси z, а плоскость xz, проходящей через направления **k** и **B**, будем

[1]) Возможность распространения этих волн в металле была указана *О. В. Константиновым* и *В. И. Перелем* (1960).

иметь для электрического поля:

$$E_y = \pm i\,|\cos\theta|\,E_x, \tag{88,10}$$

где верхний знак относится к случаю $N_e > N_h$, а нижний — к случаю $N_e < N_h$.

§ 89. Магнитоплазменные волны в металле

Рассмотрим теперь волны в компенсированном ($N_e = N_h$) металле с замкнутой ферми-поверхностью. Помимо обязательных условий (88,1—2) будем предполагать также выполненными неравенства

$$\omega \gg v_F/l, \quad \omega \gg kv_F. \tag{89,1}$$

В силу первого из них, интеграл столкновений $I(\mathbf{g})$ в кинетическом уравнении (88,6) мал по сравнению с членом $i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g}$, а в силу второго условия мал также и член $i(\mathbf{kv})\mathbf{g}$. Пренебрегая этими членами, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} - i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{v}, \tag{89,2}$$

отличающееся от уравнения (84,10) заменой члена $I(\mathbf{g})$ на $i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g}$.

Поэтому результаты, полученные в § 85 для тензора сопротивления в стационарном случае, останутся справедливыми с той лишь разницей, что малым параметром разложения по степеням $1/B$ будет теперь не r_B/l, а $-i\omega/\omega_B$. Пространственная дисперсия проводимости отсутствует, но имеется дисперсия по частотам.

Согласно (85,7), в стационарном случае главные члены разложения компонент тензора удельного сопротивления для компенсированного металла таковы:

$$\rho_{zz} = \mathrm{const}; \quad \rho_{xx},\ \rho_{yy},\ \rho_{xy} \propto B^2; \quad \rho_{xz},\ \rho_{yz} \propto B. \tag{89,3}$$

Для выделения параметра r_B/l в этом тензоре надо, однако, выяснить, как входят в его компоненты не только B, но и l. Для этого пишем, например, оценку

$$\rho_{xx} \sim \rho_0 \left(\frac{l}{r_B}\right)^2 \sim \frac{B}{ecN}\frac{l}{r_B},$$

где $\rho_0 \sim p_F/Ne^2l$. Аналогичным образом,

$$\rho_{yz} \sim \rho_0 \frac{l}{r_B} \sim \frac{B}{ecN}, \quad \rho_{zz} \sim \rho_0 \sim \frac{B}{ecN}\frac{r_B}{l}.$$