где [1])

$$u_A = \frac{B}{(4\pi N m^*)^{1/2}} \qquad (89,7)$$

Эти электромагнитные волны в металле называют *магнитоплазменными*. Волны первого и второго типа аналогичны соответственно быстрой магнитозвуковой и альфвеновской волнам в плазме [2]). Колебания же, соответствующие медленной магнитозвуковой волне, заведомо не могут иметь скорость ω/k, удовлетворяющую второму условию (89,1), и потому не могут здесь появиться.

§ 90. Квантовые осцилляции проводимости металла в магнитном поле

Изложенная в §§ 84, 85 теория гальваномагнитных явлений имела квазиклассический характер в том смысле, что квантовость проявлялась только в виде функции распределения электронов, дискретность же уровней энергии в магнитном поле не учитывалась. Эта дискретность приводит, однако, к качественно новому явлению — осцилляциям проводимости как функции магнитного поля (так называемый *эффект Шубникова — де Гааза*). Этот эффект аналогичен осцилляциям магнитного момента (эффект де Гааза — ван Альфена), но его теория сложнее ввиду кинетического, а не термодинамического характера явления. Мы рассмотрим ее в рамках модели невзаимодействующих электронов, оставляя в стороне вопрос (по-видимому, еще не исследованный) о влиянии ферми-жидкостных эффектов.

Как и в § 84, магнитное поле будем считать сильным в смысле условия (84,1), которое запишем в виде

$$\omega_B \tau \gg 1, \qquad (90,1)$$

где τ — время свободного пробега электронов, а

$$\omega_B = \frac{eB}{m^* c}. \qquad (90,2)$$

---

[1]) При законах дисперсии (89,6—7) условие $kv_F \ll \omega$ означает, что должно быть $u_A \gg v_F$. В достижимых полях B это условие может фактически выполняться лишь в полуметаллах (висмут) с малой плотностью носителей тока.

[2]) Возможность существования этих волн была указана *Буксбаумом* и *Голтом* (*S. J. Buchsbaum, J. Golt*, 1961). Изложенная теория принадлежит *Э. А. Канеру* и *В. Г. Скобову* (1963).

— ларморовская частота; m^* — циклотронная масса электронов [1]). В то же время, конечно, поле не должно быть настолько сильным, чтобы нарушилось условие квазиклассичности

$$\hbar\omega_B \ll \varepsilon_F. \tag{90,3}$$

Соотношение же между $\hbar\omega_B$ и T может быть произвольным.

Мы ограничимся исследованием квантовых осцилляций поперечной (по отношению к магнитному полю — оси z) проводимости, предполагая при этом, для упрощения записи формул, симметрию кристалла кубической. В таком кристалле симметричная (диссипативная) часть тензора проводимости имеет лишь компоненты $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ и σ_{zz}. Сравнительная простота задачи для поперечных компонент связана с тем, что для них влияние столкновений может рассматриваться (как мы видели в § 84) как малое возмущение по сравнению с влиянием магнитного поля; для продольной проводимости σ_{zz} это не так [2]).

Как и в § 84, рассматриваем металл в области его остаточного сопротивления, так что речь идет о столкновениях электронов с примесными атомами. Ввиду упругости этих столкновений, электроны различных энергий участвуют в образовании электрического тока независимо друг от друга.

Пусть $g(\varepsilon)$ — число квантовых состояний электрона, отнесенное к единичному интервалу энергий. Тогда пространственная плотность числа электронов с энергией в интервале $d\varepsilon$ есть $n(\varepsilon)g(\varepsilon)d(\varepsilon)$, где $n(\varepsilon)$ — числа заполнения состояний. Обозначим посредством $j_y(\varepsilon)$ плотность создаваемого этими электронами поперечного тока. При наличии как электрического поля, так и градиента плотности электронов, плотность тока изобразится суммой

$$j_y(\varepsilon) = eD(\varepsilon)\frac{\partial n}{\partial y}g(\varepsilon) + \sigma_{yy}(\varepsilon)E_y. \tag{90,4}$$

Первый член представляет собой диффузионный перенос заряда; $D(\varepsilon)$ — коэффициент диффузии (в реальном пространстве!) электронов с энергией ε.

Ток (90,4) должен обращаться в нуль для распределения

$$n_0(\varepsilon - e\varphi) \approx n_0(\varepsilon) - e\varphi\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon},$$

отвечающего статистическому равновесию электронного газа в слабом постоянном электрическом поле с потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$ (n_0 —

[1]) Напомним (см. IX, (57,6)) определение: $m^* = (\partial S/\partial\varepsilon)/2\pi$, где $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью $p_z = \mathrm{const}$; изоэнергетическая поверхность определена здесь в $\mathbf{p}$-пространстве (а не в $\mathbf{p}/\hbar$-пространстве, как в IX).

[2]) Что касается антисимметричной части тензора проводимости, то квантовые осцилляции в них появляются лишь во втором приближении по $1/\omega_B\tau$.

распределение Ферми). Отсюда находим соотношение, связывающее $\sigma_{yy}(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$:

$$\sigma_{yy}(\varepsilon) = -e^2 g(\varepsilon) D(\varepsilon) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

Полная же электропроводность, учитывающая вклад от электронов всех энергий, есть

$$\sigma_{yy} = -e^2 \int g(\varepsilon) D(\varepsilon) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -e^2 \sum_s D(\varepsilon_s) \frac{\partial n_0(\varepsilon_s)}{\partial \varepsilon}. \qquad (90,5)$$

В последней записи суммирование производится по всем квантовым состояниям электрона; s условно обозначает совокупность квантовых чисел состояний. Эта формула сводит задачу о вычислении проводимости к вычислению коэффициента диффузии электронов в отсутствие электрического поля.

В свою очередь коэффициент диффузии выражается через характеристики микроскопических актов рассеяния формулой типа (21,4):

$$D = \sum (\Delta y)^2 / 2\delta t,$$

где суммирование производится по столкновениям, испытываемым электроном в течение времени δt, а Δy — изменение среднего значения y-координаты электрона при столкновении (напомним, что движение электрона в плоскости, перпендикулярной полю, финитно; в наглядной картине квазиклассических орбит Δy — смещение центра орбиты). Обозначим посредством

$$N_{\text{пр}} W_{s's} \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'})$$

вероятность перехода электрона из состояния s в состояние s' при рассеянии; δ-функция выражает собой упругость рассеяния, а множитель $N_{\text{пр}}$ (плотность примесных атомов) — независимость рассеяния на хаотически расположенных атомах. Тогда коэффициент диффузии представится формулой

$$D(\varepsilon_s) = \frac{1}{2} N_{\text{пр}} \sum_{s'} (y_s - y_{s'})^2 W_{ss'} \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'}),$$

где y_s — среднее значение координаты в s-м состоянии. Подставив это выражение в (90,5), получим для проводимости:

$$\sigma_{yy} = -\frac{e^2}{2} N_{\text{пр}} \sum_{ss'} (y_s - y_{s'})^2 \frac{\partial n_0(\varepsilon_s)}{\partial \varepsilon} W_{s's} \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'}) \qquad (90,6)$$

(*S. Titeica*, 1935; *Б. И. Давыдов, И. Я. Померанчук*, 1939)[1]).

[1]) При рассеянии на примесях принцип Паули не отражается на виде формул — ср. интеграл столкновений (78,14), в котором связанные с принципом Паули произведения nn' взаимно сокращаются.

При фактическом применении этой формулы надо расшифровать смысл обозначения s. Дискретное квантование уровней энергии электрона проводимости в магнитном поле возникает при замкнутых квазиклассических траекториях в $\mathbf{p}$-пространстве (т. е. замкнутых сечениях изоэнергетических поверхностей), что и будет подразумеваться ниже. При этом квантовые состояния определяются четырьмя числами:

$$s=(n,\ P_x,\ P_z=p_z,\ \sigma), \tag{90,7}$$

где n — целое положительное (большое) число; число $\sigma=\pm 1$ задает значение проекции спина электрона, а P_x, P_z — компоненты обобщенного квазиимпульса $\mathbf{P}=\mathbf{p}-e\mathbf{A}/c$. Подразумевается, что векторный потенциал магнитного поля выбран в калибровке $A_x=-By$, $A_y=A_z=0$; ввиду цикличности координат x и z, компоненты обобщенного импульса P_x и P_z сохраняются (см. IX, § 58). Уровни же энергии зависят только от трех из этих квантовых чисел: n, p_z, σ. Они даются выражением

$$\varepsilon_{n\sigma}(p_z)=\varepsilon(n,\ p_z)+\sigma\beta B\xi_n(p_z), \tag{90,8}$$

причем функция $\varepsilon(n,\ p_z)$ — решение уравнения

$$S(\varepsilon, p_z)=2\pi\frac{e\hbar B}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{90,9}$$

Во втором члене в (90,8) $\beta=e\hbar/2mc$ — магнетон Бора, а множитель $\xi_n(p_z)$ характеризует изменение магнитного момента электрона в результате спин-орбитального взаимодействия в решетке.

Рассматривавшийся в § 84, 85 тензор проводимости есть в действительности результат усреднения точных функций $\sigma_{\alpha\beta}(B)$ по малым квантовым осцилляциям. В частности, согласно (85,3), усредненная таким образом поперечная проводимость $\overline{\sigma}_{yy}\propto B^{-2}$. Покажем, прежде всего, как этот результат получается из формулы (90,6), и выясним при этом связь между фигурирующими в этой формуле величинами $W_{s's}$ и функцией $w(\mathbf{p}',\ \mathbf{p})$ в квазиклассическом интеграле столкновений электронов с примесями (78,14).

В § 84 было уже отмечено, что условие квазиклассичности движения электрона обеспечивает в то же время независимость процесса рассеяния от магнитного поля. Вероятность рассеяния в отсутствие поля с изменением квазиимпульса от $\mathbf{p}$ к $\mathbf{p}'$ была представлена в интеграле столкновений (78,14) в виде

$$w(\mathbf{p}',\ \mathbf{p})\,\delta(\varepsilon-\varepsilon')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{90,10}$$

Чтобы написать это выражение в форме, пригодной и для рассеяния в магнитном поле, достаточно преобразовать его к переменным, сохраняющим свой смысл для движения в поле:

$$w(P'_x,\ p'_z,\ \varepsilon';\ P_x,\ p_z,\ \varepsilon)\,\delta(\varepsilon-\varepsilon')\,\frac{dP_x dp_z d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^3 v_y} \tag{90,11}$$

(производная $v_y=\partial\varepsilon/\partial p_y$ тоже подразумевается выраженной через новые переменные). Координата y при движении по квазиклассической траектории связана с обобщенным квазиимпульсом соотношением $P_x=p_x+eBy/c$; поэтому среднее (по траектории) значение

$$\bar{y}=\frac{c}{eB}\left[P_x-\bar{p}_x(\varepsilon,\ p_z)\right]\equiv\frac{\varkappa}{B}. \tag{90,12}$$

Усредненная по осцилляциям проводимость $\bar{\sigma}_{yy}$ получится по формуле (90,6) заменой в ней суммирования по дискретной переменной s интегрированием по непрерывной переменной ε. Введя для краткости обозначение

$$a(\varepsilon,\ p'_z,\ p_z)=\frac{1}{2}\int(\varkappa-\varkappa')^2\frac{w\,dP_x dP'_x}{v_y v'_y(2\pi\hbar)^4}, \tag{90,13}$$

получим

$$\bar{\sigma}_{yy}=-\frac{e^2N_{\text{пр}}}{B^2}\int a\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\delta(\varepsilon-\varepsilon')\,d\varepsilon\,d\varepsilon'\,\frac{2dp_z dp'_z}{(2\pi\hbar)^2} \tag{90,14}$$

(множитель 2—от двух направлений спина электрона; вероятность рассеяния предполагается не зависящей от спина, так что его проекция не меняется). Интегрирование по ε' устраняет δ-функцию. При интегрировании же по ε можно считать медленно меняющийся множитель a постоянным (взяв его значение при $\varepsilon=\mu$) и интегрировать лишь производную $\partial n_0/\partial\varepsilon$. В результате получим

$$\bar{\sigma}_{yy}=\frac{e^2N_{\text{пр}}}{B^2}\int a\frac{2dp_z dp'_z}{(2\pi\hbar)^2}\equiv\frac{1}{B^2}\int b(p_z)\cdot 2dp_z. \tag{90,15}$$

Перейдем теперь к учету дискретности уровней. Это значит, что вместо интегрирования в (90,14) по непрерывной переменной ε (при заданных P_x и p_z) надо писать суммирование по n, заменив

$$\int\ldots d\varepsilon\rightarrow\hbar\omega_B\sum_n\ldots,$$

где

$$\hbar\omega_B=\frac{\partial\varepsilon(n,\ p_z)}{\partial n},$$

как это ясно из (90,9) и определения циклотронной массы m^*. Используя введенные выше обозначения, пишем

$$\sigma_{yy} = -\frac{e^2 N_{\text{пр}}}{B^2} \int \sum_{nn'\sigma} a\,(\varepsilon_{n\sigma},\ p_z',\ p_z) \frac{\partial n_0(\varepsilon_{n\sigma})}{\partial \varepsilon} \times$$

$$\times\, \delta\,(\varepsilon_{n\sigma} - \varepsilon_{n'\sigma})\, \hbar\omega_B \hbar\omega_B' \frac{dp_z\, dp_z'}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (90,16)$$

(отметим, что ввиду интегрирования по обеим переменным p_z и p_z' функцию a можно считать симметричной по ним).

Осциллирующая часть этого выражения, $\tilde{\sigma}_{yy}$, выделяется с помощью формулы суммирования Пуассона (ср. IX, § 63)

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\, dx + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x)\, e^{2\pi i l x} dx \qquad (90,17)$$

и возникает от стоящей здесь суммы по l; усредненное же $\bar{\sigma}_{yy}$ возникает от первого, интегрального, члена.

Мы будем считать, что амплитуда осцилляций мала по сравнению с усредненной $\bar{\sigma}_{yy}$ (тем самым налагается определенное условие на величину магнитного поля — см. ниже (90,26)). Тогда достаточно учесть осциллирующую часть каждый раз лишь в одной из сумм (по n и по n') в (90,16). С учетом симметрии a по p_z и p_z' и введя обозначение b по аналогии с определением в (90,15), имеем

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \frac{4}{B^2} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \tilde{J}_{l\sigma}, \qquad (90,18)$$

где $\tilde{J}_{l\sigma}$ — осциллирующая часть интеграла

$$J_{l\sigma} = -\int_0^{\infty} dn \int b\,(\varepsilon_{n\sigma},\ p_z) \frac{\partial n_0(\varepsilon_{n\sigma})}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_{n\sigma}}{\partial n} e^{2\pi i l n} dp_z.$$

Введя в качестве переменной интегрирования вместо n функцию $\varepsilon(n,\ p_z)$ из (90,8), интегрируем по ε по частям (причем медленно меняющийся множитель b можно считать постоянным). Проинтегрированный член не приводит к осцилляционной зависимости от поля (и представляет собой лишь малую поправку к $\bar{\sigma}_{yy}$); опустив его, получим

$$\tilde{J}_{l\sigma} = 2\pi i l \int_0^{\infty} \int \frac{b\,(\varepsilon,\ p_z)}{\exp \frac{\varepsilon - \mu_\sigma}{T} + 1} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} dp_z\, d\varepsilon. \qquad (90,19)$$

Здесь $\mu_\sigma = \mu - \sigma\beta\xi B$ и введена функция

$$n(\varepsilon, p_z) = \frac{cS(\varepsilon, p_z)}{2\pi e\hbar B} - \frac{1}{2} \tag{90,20}$$

(ср. (90,9)); в аргументе функции $b(\varepsilon_{n\sigma}, p_z)$ пренебрежено членом $\beta\xi B$ по сравнению с большим ε.

Интегрирование по p_z в (90,19) производится в точности так, как в интеграле IX, (63,8), при исследовании эффекта де Гааза—ван Альфена. Интеграл определяется областями вблизи точек $p_z = p_{z\,\mathrm{ex}}(\varepsilon)$, в которых $n(\varepsilon, p_z)$ (т. е. площадь сечения S) как функция p_z имеет экстремумы. В результате получим

$$\tilde{J}_{l\sigma} = \sum_{\mathrm{ex}} \int_0^\infty \frac{2\pi i\sqrt{l}\exp\{2\pi i\, l n_{\mathrm{ex}} \pm i\pi/4\}\, b_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)}{\left[\exp\dfrac{\varepsilon-\mu_\sigma}{T}+1\right]\left|\partial^2 n/\partial p_z^2\right|_{\mathrm{ex}}^{1/2}} \frac{dn_{\mathrm{ex}}}{d\varepsilon}\, d\varepsilon, \tag{90,21}$$

где

$$n_{\mathrm{ex}}(\varepsilon) = n(\varepsilon, p_{z\,\mathrm{ex}}(\varepsilon)), \quad b_{\mathrm{ex}}(\varepsilon) = b(\varepsilon, p_{z\,\mathrm{ex}}(\varepsilon)),$$

а знаки + или — в экспоненте относятся соответственно к случаям, когда $p_{z\,\mathrm{ex}}$ является точкой максимума или минимума функции $n(\varepsilon, p_z)$; суммирование производится по всем экстремальным точкам.

В свою очередь интеграл (90,21) вполне аналогичен интегралу IX, (63,9), отличаясь от него лишь медленно меняющимися множителями b и $dn_{\mathrm{ex}}/d\varepsilon = cm^*_{\mathrm{ex}}/e\hbar B$ в подынтегральном выражении; эти множители (как и множитель $\left|\partial^2 n/\partial p_z^2\right|_{\mathrm{ex}}^{-1/2}$) могут быть заменены их значениями при $\varepsilon = \mu$, т. е. на ферми-поверхности. После этого интегрирование по ε и суммирование по σ приводит к окончательному результату

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \sum_{\mathrm{ex}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sigma_{yy}^{(l)} \cos\left\{l\frac{cS_{\mathrm{ex}}}{e\hbar B} \pm \frac{\pi}{4}\right\},$$

$$\sigma_{yy}^{(l)} = \frac{2^{5/2}\pi^{1/2}(e\hbar)^{1/2} b_{\mathrm{ex}}}{c^{1/2}B^{3/2}\, l^{1/2}} \left|\frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2}\right|_{\mathrm{ex}}^{-1/2} \frac{\lambda_l}{\operatorname{sh}\lambda_l} \cos\left(\pi l \xi_{\mathrm{ex}} \frac{m^*_{\mathrm{ex}}}{m}\right), \tag{90,22}$$

$$\lambda_l = 2\pi^2 lT/\hbar\omega_B, \quad \omega_B = eB/m^*_{\mathrm{ex}}c,$$

причем S_{ex}, ξ_{ex}, m^*_{ex}, b_{ex} берутся при $\varepsilon = \mu$ на ферми-поверхности [1]).

Если при заданном направлении **B** имеется всего одно экстремальное сечение ферми-поверхности, то существует пропорциональность между осциллирующими частями проводимости σ_{yy}

[1]) Осцилляции проводимости были рассмотрены *А. И. Ахиезером* (1939) и *Б. И. Давыдовым* и *И. Я. Померанчуком* (1939) для квадратичного закона дисперсии электронов, и *А. М. Косевичем* и *В. В. Андреевым* (1960) для произвольного закона дисперсии.

и продольной магнитной восприимчивости. Сравнив (90,22) с формулой IX, (63,13), найдем

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \frac{(2\pi)^4 \hbar^3 m^*_{\text{ex}} b_{\text{ex}}}{S^2_{\text{ex}}} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial B}. \tag{90,23}$$

Изложенные вычисления предполагают малость амплитуды осцилляций проводимости по сравнению с ее усредненным значением. Более того, это требование по существу является условием применимости всей изложенной в § 84, 85 теории: ясно, что усредненные значения имеют реальный смысл, лишь если они являются главной частью тензора проводимости.

При $\hbar\omega_B \sim T$ амплитуда осцилляций определяется первыми членами суммы в (90,22), в которых $l \sim 1$, $\lambda_l \sim 1$. Согласно определению в (90,15), величина b_{ex} оценивается как $b_{\text{ex}} \sim \bar{\sigma} B^2/p_F$. Производная же $\partial^2 S/\partial p_z^2 \sim 1$. Отсюда находим следующую оценку амплитуды осцилляций:

$$\tilde{\sigma}/\bar{\sigma} \sim (\hbar\omega_B/\varepsilon_F)^{1/2}, \qquad \hbar\omega_B \sim T. \tag{90,24}$$

Это отношение мало уже в силу обязательного условия (90,3).

Если же $T \ll \hbar\omega_B$, то оценка меняется. В этом случае амплитуда осцилляций определяется суммой большого числа членов в (90,22), в которых $\lambda_l \sim 1$, т. е. $l \sim \hbar\omega_B/T \gg 1$. Число таких членов порядка величины того же l. По сравнению с предыдущей оценкой здесь появляется дополнительный множитель $l^{-1/2} l \sim (\hbar\omega_B/T)^{1/2}$, так что

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sim \left(\frac{\hbar\omega_B}{\varepsilon_F}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar\omega_B}{T}\right)^{1/2} \tag{90,25}$$

Требование малости этого отношения приводит к условию

$$\hbar\omega_B \ll (\varepsilon_F T)^{1/2}. \tag{90,26}$$

Задача

Определить поперечную проводимость электронного газа с квадратичным законом дисперсии ($\varepsilon = p^2/2m$). Электроны рассеиваются на примесных атомах по изотропному закону с независящим от энергии сечением.

Решение. Задача сводится к вычислению фигурирующей в (90,15) и (90,23) величины $b(p_z)$. При квадратичном законе дисперсии $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, и поскольку среднее значение скорости вдоль замкнутой траектории $\bar{\mathbf{v}} = 0$, то и $\bar{\mathbf{p}} = 0$; поэтому согласно (90,12) $\varkappa = cP_x/e$. Согласно сказанному в тексте, при вычислении среднего значения $(\varkappa - \varkappa')^2$ можно считать процесс рассеяния не зависящим от магнитного поля. При этом разница между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{p}$ несущественна: выбрав точку нахождения рассеивающего атома в качестве точки $\mathbf{r} = 0$, будем иметь $\mathbf{P} = \mathbf{p}$.

В рассматриваемом случае вероятность рассеяния имеет вид $v\sigma_0 do'/4\pi$, где do' — телесный угол направлений импульса $\mathbf{p}'$ после рассеяния, а σ_0 — постоянное полное сечение рассеяния. Это выражение можно представить в эквивалентном виде:

$$\frac{\sigma_0}{4\pi m}\, dp_z'\, d\varphi'\, \delta(\varepsilon-\varepsilon')\, d\varepsilon',$$

где φ' — азимутальный угол направления $\mathbf{p}'$ в плоскости xy; здесь оно заменяет выражение (90,11). Аналогичным образом записываем элемент объема $\mathbf{p}$-пространства в виде $d^3p \to m\,dp_z\, d\varphi\, d\varepsilon$. При этом

$$p_x = (2m\varepsilon - p_z^2)^{1/2}\cos\varphi.$$

Теперь находим

$$a(\varepsilon, p_z', p_z) = \frac{c^2\sigma_0}{8\pi e^2}\int (p_x - p_x')^2\frac{d\varphi\, d\varphi'}{2\pi\hbar} = \frac{\sigma_0 c^2}{8e^2\hbar}(4m\varepsilon - p_z^2 - p_z'^2)$$

и, далее,

$$b(\varepsilon, p_z) = e^2 N_{\text{пр}}\int\limits_{-\sqrt{2m\varepsilon}}^{\sqrt{2m\varepsilon}} a\frac{dp_z'}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{c^2\sqrt{2m\varepsilon}}{16\pi^2\hbar^3 l}\left(\frac{10}{3}m\varepsilon - p_z^2\right),$$

где $l = 1/\sigma_0 N_{\text{пр}}$ — длина свободного пробега.

Усредненная проводимость вычисляется согласно (90,15) и равна

$$\bar\sigma_{yy} = c^2 p_F N / B^2 l,$$

где $N = p_F^3/3\pi^2\hbar^3$ — плотность числа электронов. Площадь сечения ферми-сферы имеет максимум при $p_z = 0$, причем $S_{\text{ex}} = \pi p_F^2$. Поэтому

$$b_{\text{ex}} = 5c^2 N/16l.$$

Для осциллирующей части проводимости находим согласно (90,23):

$$\tilde\sigma_{yy} = B^2\bar\sigma_{yy}\frac{5}{6N\varepsilon_F}\frac{\partial\tilde M_z}{\partial B}.$$

Осциллирующая часть намагниченности $\tilde M_z$ для рассматриваемой модели дается формулой V (60,6),